

令和2年度
(2020年度)

東北大学大学院理学研究科
博士課程前期2年の課程
地球物理学専攻一般選抜入学試験

筆記試験問題

数物系科目：[1]－[7]

(表紙も含めて13枚)

令和元年8月21日

数物系科目

1. 数物系科目の問題は〔1〕から〔7〕まで7問ある。そのうち4問を選んで解答すること。
2. 答えは、問題ごとに別々の答案用紙に記入し、各答案用紙の上端に、問題番号（1カ所）と受験番号（1カ所）を記入すること。
3. 答えが白紙の場合でも、必ず答案用紙に問題番号と受験番号を記入して提出すること。
4. 答えには、計算の過程などの解答に至る根拠を記すこと。問題文に特に指示がある場合には、それに従うこと。
5. 問題紙、答案用紙、草案紙は持ち帰らないこと。

[1] 水平な粗い床上における，長さが $2L$ ，質量が M の均質な棒の運動について，次の問いに答えよ．床に沿った方向を x 軸，鉛直方向を y 軸，重力加速度を g として，運動は xy 平面上に限るとする．

(1) 棒の下端を床の上におき，ほぼ鉛直の状態から静かにはなした．図1のように，棒の重心を G ， y 軸と棒のなす角を θ ，床の垂直抗力を R ，摩擦力を F とする．棒の重心まわりの慣性モーメントを $I = \frac{ML^2}{3}$ とし，次の問いに答えよ．

(i) 棒が床上をすべらずにその下端を軸とした回転運動をするとき，エネルギー保存式を求めよ．また， x ， y 方向に関する棒の重心の運動方程式を求めよ．

(ii) 問(i)のとき， F と R が以下のように表されることを示せ．

$$F = \frac{3Mg}{4} \sin\theta(3\cos\theta - 2), \quad R = \frac{Mg}{4} (3\cos\theta - 1)^2$$

(iii) 棒の下端がすべらないときを考える．下端が床から離れるときの θ の大きさ β を求めよ．

(iv) $\theta = \theta'$ ($< \beta$) で棒の下端がすべり始めたとする．このとき，棒と床との間の静止摩擦係数を， θ' を用いて表せ．

(2) 棒の上端に質量 m の質点をつけて，問(1)と同様の運動を行った． θ ， F ， R ， I については問(1)と同じ定義を用いて，次の問いに答えよ．ここで棒の下端はすべらないとする．

(i) 棒の下端から質点つき棒の重心までの距離を d ，下端のまわりの慣性モーメントを I_1 とし， d と I_1 を M ， m ， L のうち必要なものを用いてそれぞれ表せ．

(ii) 棒が下端を軸とした回転運動をするときの R を， M ， m ， θ ， d ， I_1 ， g のうち必要なものを用いて表せ．

(iii) 問(2)(i)，(ii)の結果をもとに， θ が問(1)(iii)で求めた β に達しないうちに棒の下端が床から離れることを示せ．

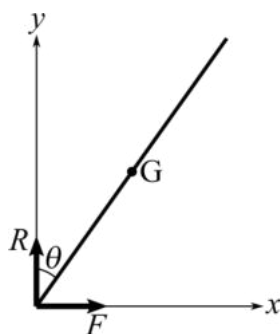


図 1

[2] 次の問(1), (2)に答えよ.

(1) 図1のようにシリンダー内に無数の小さな穴が開いた壁（細孔壁）があり、はじめその左側に圧力 P_1 、体積 V_1 の気体が入っている．シリンダーの断面積を A として、左右のピストンにはそれぞれ P_1A 、 P_2A の力をかけ続ける ($P_1 > P_2$)．気体が細孔壁を通りすべて右側に移ったとき、体積は V_2 になったとする．気体は理想気体とし、そのモル数を M とする．ほかに必要な定数や変数は定義して使ってよい．シリンダーとピストンは熱を伝えないとし、その接触面はなめらかであるとする．

- (i) エンタルピー $H = U + PV$ がこの過程で変わらないことを示せ．ただし、 U は内部エネルギー、 P は圧力、 V は体積である．
- (ii) 定積モル比熱を C_V 、絶対零度のときの内部エネルギーを U_0 としてエンタルピーを温度 T で表せ．また、この過程で温度が変わらないことを示せ．
- (iii) すべての気体が右側に移った後の体積 V_2 を求めよ．
- (iv) 気体が理想気体ではない場合、気体の移動に伴い温度変化が生じる．このとき温度変化率は

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H = \left(\frac{V}{C_P}\right)(T\alpha - 1)$$

で表されることを示せ．ただし、 C_P は定圧比熱、 $\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$ は体積膨張率である．

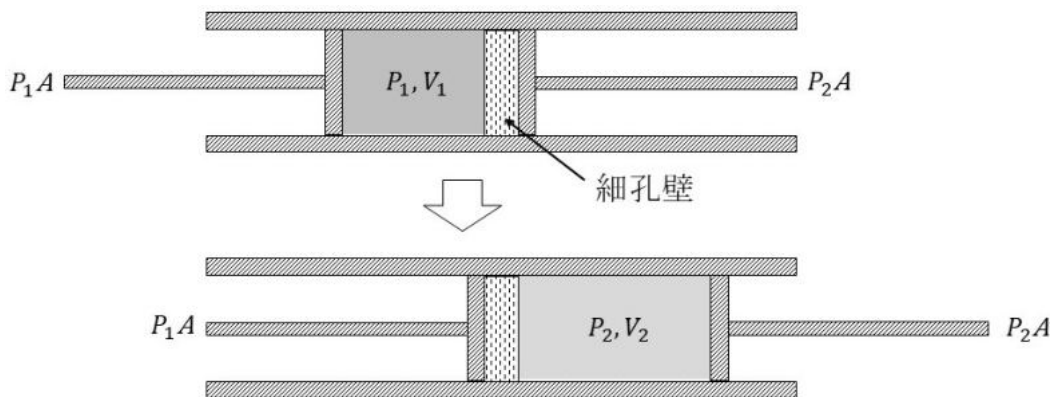


図 1

[2] は次ページに続く

- (2) 球形単原子分子からなる圧力 P , 温度 T の 1 モルの気体を考える. 普遍気体定数を R , アボガドロ数を N_A とする.
- (i) 気体を理想気体とみなしてよいとき, この気体の体積 V を求めよ. また, 分子の数密度 n を求めよ.
- (ii) 分子の半径を r とする. 常に, 1 つの分子が一定の速さ v_0 で移動し, ほかの分子は静止していると仮定する. このとき, 単位時間内に起こる衝突の回数 N を求めよ. また, 衝突から次の衝突までに分子の動く距離の平均値 (平均自由行程) L を求めよ.
- (iii) 問(ii)では衝突される分子が静止しているとしたが, 実際にはすべての分子が運動している. 個々の分子が, 任意の方向に速さ v_0 で移動していると仮定したとき, 衝突の回数と平均自由行程は問(ii)の結果に対してどのようなようになると考えられるか. 理由を含めて 100 字程度で述べよ.
- (iv) 速さが v と $v + dv$ の間にある分子の数が $\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)v^2 dv$ に比例するとき, 分子の速さの最頻値を求めよ. ただし, m は 1 つの分子の質量, k はボルツマン定数である.

[3] 複素速度ポテンシャルを用いて表すことのできる完全流体の流れについて、次の問(1)から(3)に答えよ。

2次元直交直線座標系 (x, y) における流れの速度成分をそれぞれ u, v と書く。時間を表す変数を t とする。 $z = x + iy$ は複素数、 i は虚数単位 ($i = \sqrt{-1}$) である。複素数 z の複素共役 (共役複素数) を \bar{z} と表す。 a, κ を実数の定数として用い、 $a > 0, \kappa > 0$ とする。

(1) 以下の関係が成り立つことを示せ。 w は複素速度ポテンシャルである。

(i)
$$\frac{dw}{dz} = u - iv$$

(ii)
$$\frac{d\bar{z}}{dt} = u - iv$$

(2) ①式の複素速度ポテンシャル (w_1) が表す流れについて以下の問いに答えよ。

$$w_1 = -i\kappa \log(z - a) \quad \text{①}$$

(i) $z = 2a$ での $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$ を求めよ。

(ii) 速度ポテンシャルと流線関数 (流れの関数) を求めよ。必要な変数を定義して使ってよい。

(iii) 流線が $z = a$ を中心とする円となることを示せ。

(iv) 流れの中の閉曲線 C を一周する線積分

$$\Gamma = \oint_C (u dx + v dy)$$

を考える。 $\Gamma = 0$ となるような閉曲線の例を1つあげよ。

[3] は次ページに続く

- (3) ②式は, x 軸上に等間隔 a で並ぶ, 強さが等しい渦糸の列 (渦列) による複素速度ポテンシャル (w_2) である. 以下の問いに答えよ. 必要であれば下の公式を用いよ.

$$w_2 = \frac{\kappa}{2\pi i} \log \sin\left(\frac{\pi z}{a}\right) \quad \text{②}$$

- (i) 原点 ($z = 0$) には渦糸がある. この原点にある渦糸の移動速度が 0 であることを示せ.
- (ii) 渦列は不動である. その理由を 100 字程度で述べよ. 図を用いてもよい.
- (iii) 原点にある渦糸を $z = z_0$ に変位させたとする. このときの複素速度ポテンシャル (w_3) は

$$w_3 = \frac{\kappa}{2\pi i} \left[\log \sin\left(\frac{\pi z}{a}\right) - \log z + \log(z - z_0) \right]$$

となる. 変位させた渦糸の位置が原点の近傍であるとき,

$$\frac{d\bar{z}_0}{dt} = -\frac{\pi\kappa}{6a^2 i} z_0$$

が成り立つことを示せ.

- (iv) 問(iii)の結果を用いて, ②式の渦列が外部からの擾乱に対して不安定であることを説明せよ.

公式

$$\sin z = z \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{2^2\pi^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right) \cdots = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$$

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{1}{z} + 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - n^2\pi^2}$$

$$\cot z \cong \frac{1}{z} - \frac{z}{3} \quad (z = 0 \text{ の近傍で})$$

[4] 以下の問いに答えよ.

- (1) 原点を中心とする半径 a の導体球が電荷 Q で帯電している. 以下の問いに答えよ.
- (i) 電荷 Q が導体球の内部・表面にどのように分布するか述べよ.
- (ii) ガウスの法則の積分形を用いて, 位置 $\mathbf{r} = (r, \theta, \phi)$ (3次元極座標系) の電場 \mathbf{E} が

$$\mathbf{E} = E\mathbf{e}_r = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r & (r > a) \\ \mathbf{0} & (r < a) \end{cases}$$

となることを示せ. ϵ_0 は真空の誘電率, \mathbf{e}_r は r 方向の単位ベクトルである. ガウスの法則を用いる際には, どのような曲面・領域に適用したか説明すること.

- (iii) 位置 \mathbf{r} での電位 V を求めよ. ただし, 無限遠を電位の基準とする.
- (iv) 電場 \mathbf{E} が生じている空間には, 単位体積あたり $\frac{\epsilon_0 |\mathbf{E}|^2}{2}$ の静電エネルギーが蓄えられている. 全空間に蓄えられる静電エネルギーを求めよ.
- (v) 導体球に電荷 Q が蓄えられた状態で, 微小電荷 dQ ($dQ \ll Q$) を無限遠から導体球に運んで $Q + dQ$ とした. この際に要した仕事 dW を求めよ.
- (vi) 帯電していない導体球を電荷 Q まで帯電させるのに要する仕事 W を, 問(v)で求めた dW を用いて求めよ. また, 求めた仕事 W を問(iv)の結果と比較し, その物理的意味を説明せよ.

- (2) 3次元直交直線座標系で表されるある系に, 一様な磁場 $\mathbf{B} = (0, -B, 0)$ ($B > 0$) が印加されている. 系内で質量 m の粒子には重力 $\mathbf{F} = (0, 0, mg)$ がはたらく. g は重力加速度である. 以下の問いに答えよ.
- (i) 図1に示すように, 電荷 q , 質量 m , 速度 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ の荷電粒子を原点に置き, その時刻を $t = 0$ とする. 荷電粒子の運動方程式を示せ.
- (ii) 問(i)の運動方程式を解いて, 荷電粒子の速度 \mathbf{v} を時刻 t の関数として求めよ.
- (iii) 系内に一様な密度で多数の陽イオンと電子を分布させたところ, 電流が流れた. 問(ii)の結果を用いて, この電流の定常成分の向きを答え, その理由を説明せよ. 説明では, 必要な変数, 定数を定義して用いてよい.

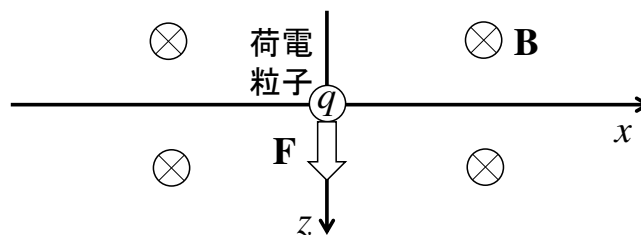


図1

[5] ポテンシャル $V(x)$ 中の1つの粒子 (質量 m) を表す1次元シュレディンガー方程式は①式となる. i は虚数単位, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ (h : プランク定数), $\Psi(x,t)$ は波動関数である. 次の問いに答えよ.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x,t) + V(x)\Psi(x,t) \quad \text{①}$$

(1) 確率解釈では, 存在確率の密度 ρ を②式で, その流束密度 j を③式で, それぞれ定義できる. なお, Ψ^* は Ψ の複素共役である.

$$\rho = \Psi^* \Psi \quad \text{②}$$

$$j = \frac{\hbar}{2mi} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \right) \quad \text{③}$$

このとき連続の式 (④式) が成立, すなわち存在確率が保存されることを示せ.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0 \quad \text{④}$$

(2) 全空間での存在確率は $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^* \Psi \, dx = 1$ となる. これが不変, すなわち⑤式が成立するには, 無限遠で Ψ とその勾配が0となればよいことを示せ.

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho \, dx = 0 \quad \text{⑤}$$

(3) 位置の期待値を $\langle x \rangle$, 運動量の期待値を $\langle p \rangle$ とする.

(i) 古典論の運動量に対応する関係 $m \frac{d\langle x \rangle}{dt} = \langle p \rangle$ が成立することを示せ.

(ii) 古典論の運動方程式に対応する関係 $\frac{d\langle p \rangle}{dt} = -\left\langle \frac{\partial V}{\partial x} \right\rangle$ も成立することを示せ.

(4) ①式は, 特殊相対論を満たさない. その理由を手短かに述べよ.

[6] 3次元直交直線座標系における平面応力状態にある等方均質弾性体を考える。 τ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$; i は力の向き, j は力のはたらく面の法線方向を表す)を応力テンソルとし, $\tau_{13} = \tau_{23} = \tau_{33} = 0$ とする. このとき以下の問 (1) から (3) に答えよ.

- (1) 図1のような三角形 OAB を底面とし, 紙面に直交する方向に単位厚さを持つ三角柱を弾性体内に考える. 辺 AB を含む側面を面 AB (面積 dX) とする. 面 AB の単位法線ベクトルを $\mathbf{n} = (n_1, n_2, 0)$, その面にはたらく応力ベクトル \mathbf{T}^n の x_i 軸方向の成分を T_i^n とする. また, O から辺 AB におろした垂線を OP とし, その長さを h とする. 単位体積あたりの体積力 \mathbf{F} の x_i 成分を F_i とする. この三角柱は平衡状態にあるものとし, 以下の問いに答えよ.

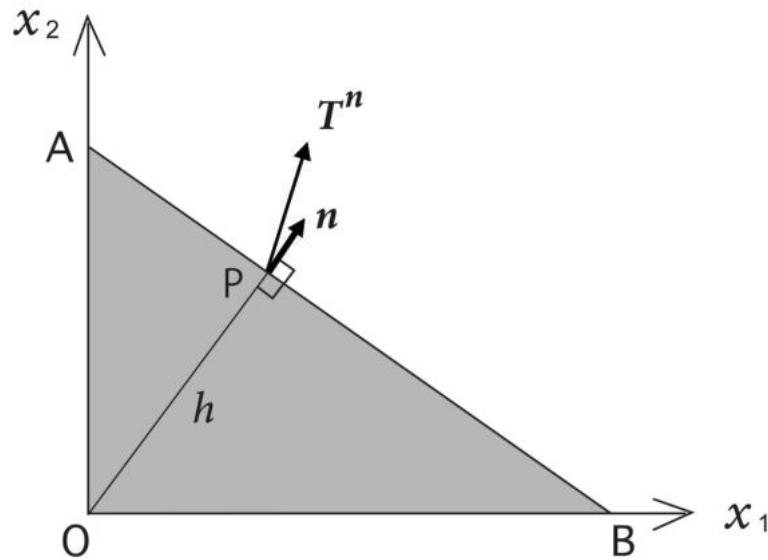


図1

- (i) x_1 軸方向の力のつりあいの式を, T_1^n , F_1 , h , n_1 , n_2 , dX , τ_{11} , τ_{12} をすべて用いて示せ.
- (ii) 図1で示した底面 OAB が微小であるとき, T_i^n を τ_{ij} と n_j により示せ. ただし, 総和規約を用いること.

[6] は次ページに続く

- (2) 図2のような，紙面に直交する方向に単位厚さを持つ物体を考える．紙面に直交し，法線ベクトル \mathbf{n} と x_1 軸がなす角が θ である面 AB が物体内にあるとする． x_1 軸方向に主応力 σ_1 ， x_2 軸方向に主応力 σ_2 がはたらいている ($\sigma_1 > \sigma_2 > 0$ ， 圧縮が正)．ここで，法線応力 N は圧縮を正，せん断応力 S は図2の矢印の向きを正とする．

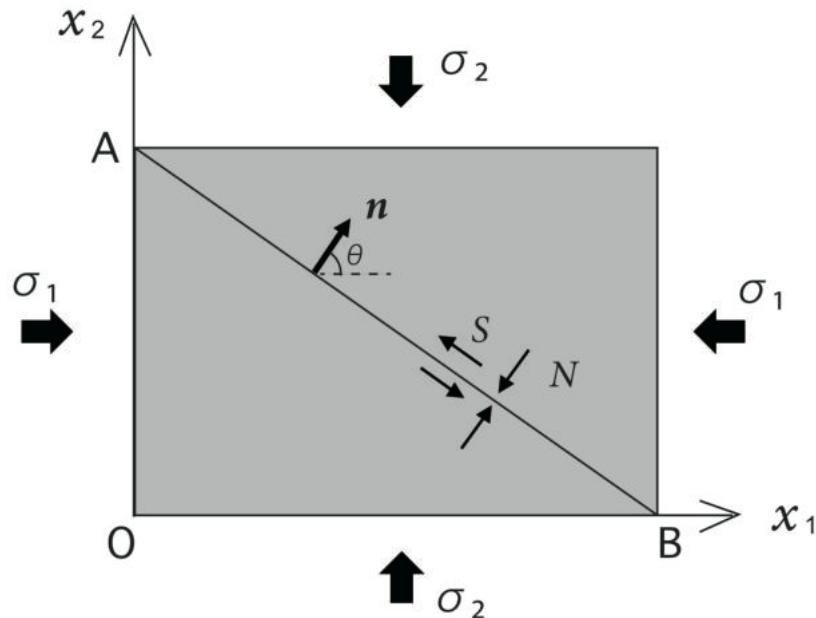


図2

- (i) N と S をそれぞれ求めよ．
- (ii) N と S は円を表す二次方程式を満たすことを示せ．
- (3) クーロンの破壊基準によれば，ある面に作用するせん断応力の大きさがその面のせん断破壊強度 S_t に達したときに物体は破壊する．その面における S_t と法線応力 N (圧縮を正) の関係は

$$S_t = S_0 + \mu N$$

と書ける．ここで， S_0 は凝着力， μ は内部摩擦係数である． x_1 軸方向に主応力 σ_1 ， x_2 軸方向に主応力 σ_2 がはたらいている ($\sigma_1 > \sigma_2 > 0$ ， 圧縮が正) とする．この物体が，クーロンの破壊基準にしたがい，破壊が x_1 - x_2 平面に直交する面で起こるとき以下の問いに答えよ．

- (i) 破壊が起こる面の法線方向が最大主応力軸となす角を求めよ．
- (ii) S_0 ， μ および差応力 $(\sigma_1 - \sigma_2)$ について，それぞれの値の大きさと破壊強度および破壊の起こり方の関係について述べよ．

[7] 次の問いに答えよ.

(1) 次の正方行列 \mathbf{A} について, 問(i)から(iv)に答えよ.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) 行列 \mathbf{A} の固有値と固有ベクトルを求めよ. ただし, 固有ベクトルは規格化 (正規化) すること.

(ii) 問(i)の結果を用いて, $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ ($a \leq b \leq c$, ただし, a, b, c は

実数) となるように対角化する行列 \mathbf{P} と逆行列 \mathbf{P}^{-1} を求めよ.

(iii) 行列 \mathbf{A} の行列式を求めよ.

(iv) 問(ii)の結果を用いて, 行列 \mathbf{A} の n 乗を求めよ. ただし, n は正の整数とする.

(2) 次の微分方程式を解け.

(i)
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x(y^2+3)}{y(x^2+1)}$$

(ii)
$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 2e^{-x}$$

[7] は次ページに続く

(3) 次の積分 I の値を求めよ.

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{b \cos \theta d\theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2} \quad (\text{ただし, } a, b \text{ は実数で } |a| > 1)$$

必要であれば図 1 の複素平面上の単位円を積分路として使ってよい.

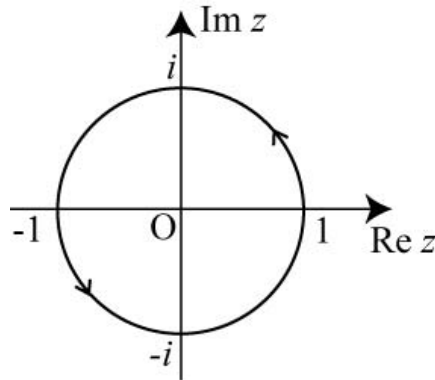


図 1

(4) 平均 μ , 分散 σ^2 の正規分布に従う母集団から, n 個のデータ $x_i (i=1, \dots, n)$ を抽出することを考える. x_i の確率密度関数は $p(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$ である. $x_i (i=1, \dots, n)$ が互いに独立であるとき, 問(i), (ii)に答えよ.

(i) 尤度関数 $L(\mu, \sigma^2; x_1, \dots, x_n)$ を求めよ.

(ii) 母平均 μ の最尤推定量が $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ となることを示せ.