令和３年度

（２０２１年度）

東北大学大学院理学研究科

博士課程前期２年の課程

地球物理学専攻一般選抜入学試験

筆記試験問題

数物系科目：［１］–［７］

（表紙も含めて１１枚）

令和２年８月１９日

数 物 系 科 目

1. 数物系科目の問題は［１］から［７］まで７問ある．そのうち４問を選んで解答すること．
2. 答案は，問題ごとに別々の答案用紙に記入し，各答案用紙の上端に，問題番号（１ヵ所）と受験番号（１ヵ所）を記入すること．
3. 答案が白紙の場合でも，必ず答案用紙に問題番号と受験番号を記入して提出すること．
4. 答案には，計算の過程などの解答に至る根拠を記すこと．問題文に特に指示がある場合には，それに従うこと．
5. 問題紙，答案用紙，草案紙は持ち帰らないこと．

［ １ ］　図１のような原点Ｏを支点とする二重振り子が xz 平面内で微小振動している． z 軸は鉛直下向きを正とする．質量 m の重りが２つあり，それぞれの位置を（x_1, z_1)，(x_2, z_2）とする．重りは質点とみなす．支点と重り１，重り１と重り２をつなぐ糸の長さは共に l であり，それらが鉛直下向きとなす角をそれぞれ φ_1, φ_2 とする．糸の質量，伸縮，たるみは考えない．重力加速度を g とし，空気抵抗は無視できる．変数の上のドットは時間微分を表す．次の問いに答えよ．

(1)　２つの重りの位置を l, φ_1, φ_2 を用いて示せ．

(2)　系全体の運動エネルギーを m , l , φ_1, φ_2 , $\dot{\varphi}_1$, $\dot{\varphi}_2$ を用いて示せ．

(3)　系全体のポテンシャルエネルギーを m , l , g, φ_1 , φ_2 を用いて示せ．

(4)　一般化座標を θ ，ラグランジアンを L とするとラグランジュ方程式は

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial \theta}$$

である．

ラグランジュ方程式を用いて，この二重振り子の運動方程式を導け．なお，微小振動であるため， $\cos\varphi_i \approx 1-(1/2)\varphi_i^2 \quad (i=1,2)$　及び　$\cos(\varphi_1-\varphi_2)\approx 1$　とする．

(5)　運動方程式に，重り１と重り２が同じ角振動数 ω で振動する解 $\varphi_1(t)=A_1\sin(\omega t)$, $\varphi_2(t)=A_2\sin(\omega t)$ （ただし， $A_1 \neq 0$ かつ $A_2 \neq 0$ ，及び時刻 $t=0$ での位相が共にゼロ）を与えると，２つの固有周期が得られる．２つの固有周期それぞれを l ，g を用いて示せ．

(6)　問 (5) で求めた２つの固有周期の振動解それぞれについて， A_1 と A_2 の関係を示せ．

(7)　問 (5) で求めた２つの固有周期のうち，短いほうの周期を T_1 ，長いほうの周期を T_2 とする．さらに， $A_1=1$［度］とする．次の問いに答えよ．

(i)　２つの重りが共に周期 T_1 で振動する場合の， φ_1 と φ_2 の時間変化を図示せよ．

(ii)　２つの重りが共に周期 T_2 で振動する場合の， φ_1 と φ_2 の時間変化を図示せよ．

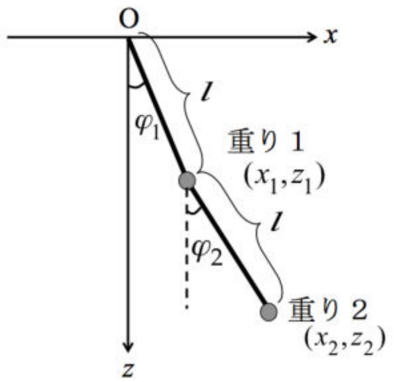

図１

［ ２ ］ 気体の温度を T，体積を V，圧力を P，気体定数を R（8.3 J mol^{-1} K^{-1}）とする．必要な変数は各自で定義し使用してよい．次の問いに答えよ．

(1) 理想気体 1 mol について考える．次の問いに答えよ．

(i) ボイルの法則（等温変化について $PV=$ 一定）とシャルルの法則（等圧変化について $V=aT$： a は比例係数）を用いて，状態方程式 $PV=RT$ が成り立つことを示せ．

(ii) 問 (i) を用いて，内部エネルギー U は，温度が一定であれば体積が変化しても変わらないことを示せ．

(iii) 定圧モル比熱 C_P と定積モル比熱 C_V の間にマイヤーの法則（$C_P-C_V=R$）が成り立つことを示せ．

(2) 理想気体 1 mol の温度を T_1 から T_2 に上げる準静的過程を，a) エントロピー 一定，b) 圧力一定，c) 体積一定の三種類の条件で行う．定圧モル比熱 C_P と定積モル比熱 C_V は一定とする．比熱比（C_P/C_V）を γ とするとき，次の問いに答えよ．

(i) a) の場合，温度と圧力の間に①式の関係があることを示せ．

$$TP^{(1-\gamma)/\gamma} = \text{一定} \qquad ①$$

(ii) b) の場合のエントロピー増加量は，c) の場合の γ 倍であることを示せ．

(3) アボガドロ数を N_A，ボルツマン定数を k_B，分子の二乗平均速度を $\langle v^2 \rangle$ とする．次の問いに答えよ．必要に応じて $R=N_Ak_B$ の関係を用いよ．

(i) 単原子分子からなる理想気体 1 mol について，分子運動論から，$P=N_A m\langle v^2 \rangle/3V$ の関係が得られる．m は 1 分子の質量である．これを用いて，エンタルピー H が②式で表せることを示せ．ただし，H_0 は温度 T_0 におけるエンタルピーとする．

$$H=H_0+\frac{5}{2}N_Ak_B(T-T_0) \qquad ②$$

(ii) 常温，1 気圧での窒素（N_2）と二酸化炭素（CO_2）の定積モル比熱の実測値は，それぞれ 20.8 J mol^{-1} K^{-1}，28.8 J mol^{-1} K^{-1} であった．これらの実測値とエネルギー等分配則から求めた値を比較し，その違いについて考察せよ．さらに温度を上げた場合，窒素の定積モル比熱はどのように変化するか，理由とともに答えよ．

［ 3 ］ 図 1 のように水の入った水平断面積 A の容器がある．この容器の底部から高さ L の位置に面積 a の小さな孔があいており，水が速度 v で流出している．水は密度 ρ の非圧縮完全流体で，流れは渦なしとする．z 軸は鉛直上向きを正とし，孔の高さを $z = 0$，孔から水面までの高さを h，重力加速度を g とする．以下の問いに答えよ．

(1) 流れが定常であるとして，オイラーの運動方程式からベルヌーイの定理を導け．必要であれば変数を自分で定義して使ってよい．

(2) $A \gg a$ として，h の時間変化が無視できるとする．ベルヌーイの定理から，孔からの流出速度 v が $\sqrt{2gh}$ となること，すなわちトリチェリの定理を導け．

(3) 水面のゆっくりとした降下について考える ($h = h(t)$)．水の流出速度はトリチェリの定理に従うとして，次の問いに答えよ．

(i) 水面降下速度 $\left(-\frac{dh}{dt}\right)$ を A，a，v で示せ．

(ii) $h(t) = \left(\sqrt{h_0} - \frac{a}{A}\sqrt{\frac{g}{2}}\, t\right)^2$ となることを示せ．$t = 0$ のとき $h = h_0$ とする．

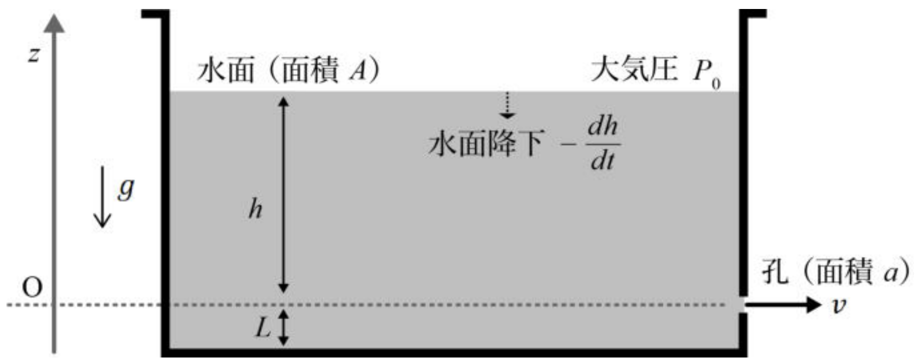

図 1

［ 3 ］は次ページに続く

(4) 今度は，図 2 のように容器を蓋で密閉し，十分に細い空洞のチューブを水にさした状態で孔から水を流出させる．チューブと蓋の間に隙間はなく，水面はゆっくりと降下する ($h = h(t)$)．水の流出速度はトリチェリの定理に従うとして，次の問 (i)，問 (ii) の状況について，それぞれ答えよ．

(i) チューブをゆっくり上に引き上げたとする．チューブ下端が水面に達した瞬間 ($t = 0$) から，流出速度 v が 0 となるのに要する時間 T_1 を求めよ．チューブが水中に戻ることはなく，また，チューブの動きは水に影響しないとする．$t = 0$ のとき $h = h_0 > 0$ とする．

(ii) チューブを水にさした状態で固定したとする．チューブ下端 ($z = H$) での圧力が大気圧に等しくなった瞬間 ($t = 0$) から，流出速度 v が 0 となるのに要する時間 T_2 を求めよ．また，h の時間変化を図示せよ．$t = 0$ のとき $h = h_0 > H > 0$ とする．

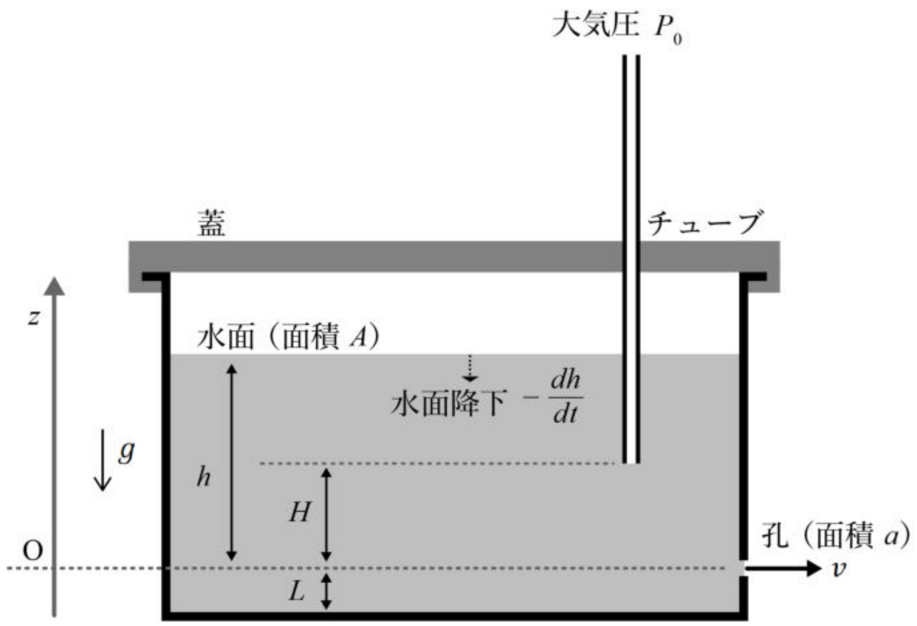

図 2

［ ４ ］ 図１のように，z軸上の点$\mathrm{A}_2(0,0,-d)$から点$\mathrm{A}_1(0,0,d)$に電流Iを流すと，点A_1には$+q$，点A_2には$-q$の点電荷が現れる．磁場の時間変化により生じる電場は無視できるとする．$\mathbf{e}_x$，$\mathbf{e}_y$，$\mathbf{e}_z$を座標系の基底ベクトル，μ_0，ε_0をそれぞれ真空中の透磁率，誘電率とする．次の問いに答えよ．

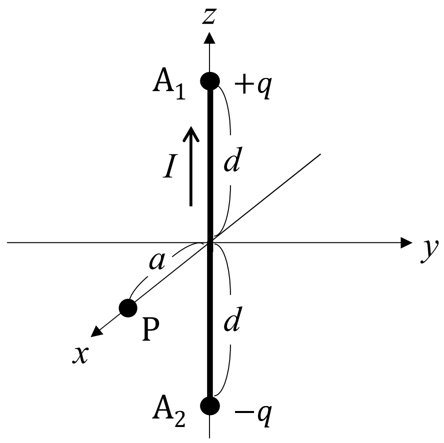

図１

(1) 図１のx軸上の点$\mathrm{P}(a,0,0)$における電場が，①式で表されることを示せ．

$$\mathbf{E} = -\frac{qd}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{e}_z}{(a^2+d^2)^{3/2}} \qquad ①$$

(2) 電流密度$\mathbf{i}$，電場$\mathbf{E}$，および磁場$\mathbf{B}$の間には，②式のアンペール・マクスウェルの法則が成り立つ．Cは閉曲線の経路，SはCに囲まれた面，$\mathbf{n}$は面要素の法線ベクトルを表す．この式の物理的意味を100字程度で説明せよ．

$$\oint_{\mathrm{C}} \mathbf{B}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \mu_0\int_{\mathrm{S}} \mathbf{i}\cdot\mathbf{n}dS + \varepsilon_0\mu_0\frac{d}{dt}\int_{\mathrm{S}} \mathbf{E}\cdot\mathbf{n}dS \qquad ②$$

(3) 点Pにおける磁場について考える．

(i) 磁場$\mathbf{B}$が③式で表されることを示せ．

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\frac{d}{\sqrt{a^2+d^2}}\mathbf{e}_y \qquad ③$$

(ii) $d \ll a$および$d \gg a$の場合の近似式を，それぞれd/aおよびa/dの一次の精度で求めよ．

［ ４ ］は次ページに続く

(4) 雷放電によって雷雲と地表間を電流が流れる．地表を導体平面とみなし，この電流で生じる電場と磁場を，図２のモデルを使って考える．

(i) xy面を接地導体面とし，原点から点$\mathrm{A}_1(0, 0, d)$に電流Iを流すと，導体面には軸対称な電流が流れ，点A_1に$+q$の点電荷が現れる． $z > 0$で，図１の系と同じ電場と磁場が生じる理由を，それぞれ 100 字程度で述べよ．図を用いてもよい．

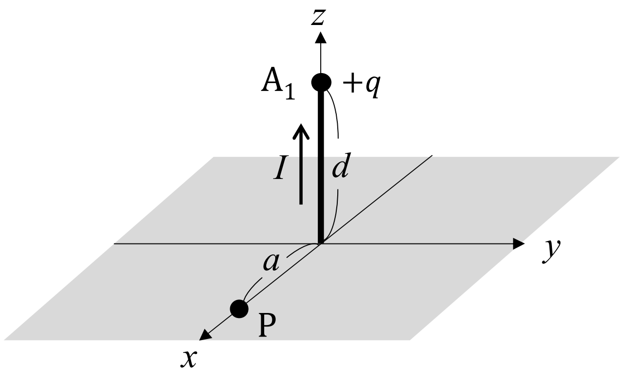

図２

(ii) 鉛直方向に落雷電流が流れ，落雷点から水平方向に距離a離れた観測点Pで，図３に示す磁場変動が観測された．磁場の向きは地表面に平行で，落雷点と観測点を結ぶ線に直交していた．放電路長dがaより十分短いと近似して，落雷で流れた総電荷量を求めよ．$d = 4.0$ km，$a = 3.0 \times 10^2$ km，$\mu_0 = 1.3 \times 10^{-6}$ H/mとする．国際単位系(SI)では $\mathrm{H = V \cdot s/A}$，$\mathrm{T = V \cdot s/m^2}$ である．

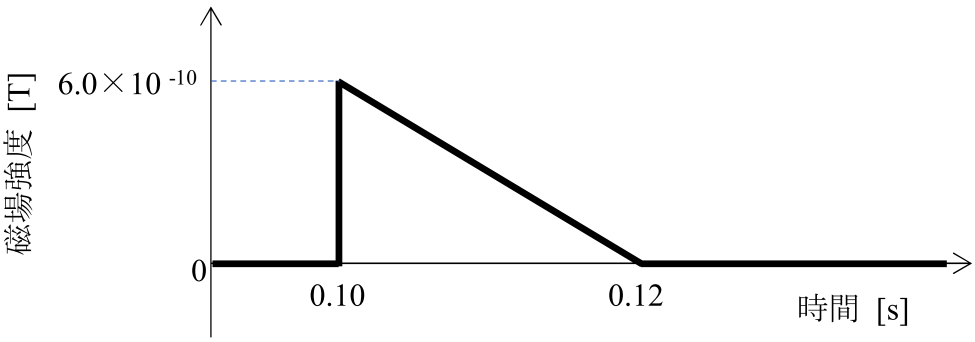

図３

［ 5 ］ 質量 m の粒子が調和振動子ポテンシャル $V(x) = (m\omega^2/2)\,x^2$ に拘束されている．この基底状態について考える．$\hbar = h/2\pi$（h：プランク定数），$\Psi(x)$ は時間によらない波動関数である．次の問いに答えよ．なお，下に示す積分公式を用いてよい．

(1) 粒子がエネルギー固有値 E を持つとき，
この系が満たす「時間によらない 1 次元シュレディンガー方程式」を記せ．

(2) 基底状態における時間によらない波動関数は $\Psi(x) = A\exp\{(-m\omega/2\hbar)\,x^2\}$ (A : 規格化定数) となる．この式は問(1)の解となり，そのエネルギー固有値 E は $\dfrac{\hbar\omega}{2}$ であることを示せ．

(3) 問(2)の $\Psi(x)$ を $x = -\infty \sim +\infty$ で規格化すると，A は $\left(\dfrac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}$ となることを示せ．

(4) 基底状態では，古典論と同様，
位置の期待値 $\langle x \rangle$ と運動量の期待値 $\langle p \rangle$ は共に 0 となることを示せ．

(5) 基底状態では，古典論と違い，$\langle x^2 \rangle$ と $\langle p^2 \rangle$ は 0 とはならないことを示せ．

(6) 問(5)の結果は，不確定性原理と矛盾しないことを示せ．

[積分公式]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\exp(-ax^2)\,dx = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\exp(-ax^2)\,dx = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

(ただし $a > 0$)

［　6　］　次の問いに答えよ．ただし，変形はすべて微小であるとする．

(1)　直交直線座標系 O-xyz に置かれた物体に外力が作用して,その内部に連続な応力場 $\sigma_{ij}(x,y,z)$　$(i,j=x,y,z)$ が生じている．このとき，物体内の微小直方体の各面における応力ベクトルの成分は図１のように図示できる．物体には体積力 $F_i(x,y,z)$　$(i=x,y,z)$ が作用しており，平衡状態にある．

(i) 体積力と応力の平衡方程式を導出し，総和規約を用いて表せ．

(ii) $\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$ であることを示せ．

(2)　等方均質弾性体（ヤング率 E，ポアソン比 ν）の円柱を，以下の２通りの条件下で変形させる．

条件(a) 円柱の半径方向のひずみがゼロとなるように拘束する．

条件(b) 円柱の半径方向の変形を拘束しない．

条件(a)，(b)のそれぞれのもとで，軸方向の線ひずみが ε となるように円柱を変形する．このときに必要な軸方向の法線応力をそれぞれ σ_a，σ_b とする．

(i) ラメの定数（λ，μ）が，ヤング率とポアソン比を用いて

$$\lambda=\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)},\qquad \mu=\frac{E}{2(1+\nu)}$$

と表せることを示せ．

(ii) $E\geq 0$，$0.5\geq\nu\geq -1$ である時，$|\sigma_a|\geq|\sigma_b|$ であることを示せ．

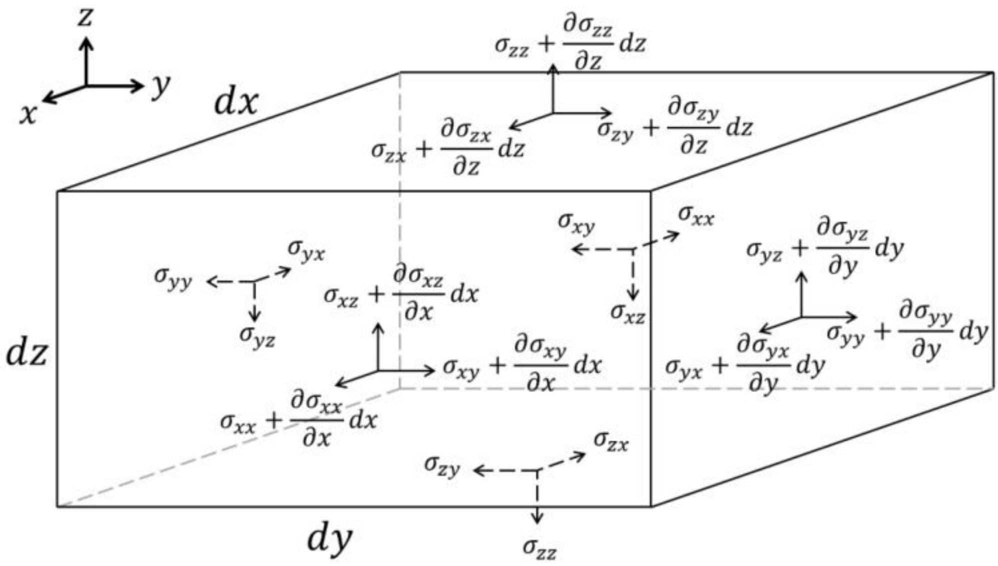

図１

[7] 以下の問いに答えよ.

(1) 次の不定積分を求めよ. n は自然数とする.

$$\int \frac{(\log_e x)^n}{x} dx$$

(2) 次の連立微分方程式を与えられた初期条件で解け. $x_1,\ x_2$ は t の関数とする.

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 + 2x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 2x_1 - 2x_2 \end{cases} \qquad x_1(0) = 5, \quad x_2(0) = 10$$

(3) 直交直線座標系上の 3 点 $(a, 1, 1), (1, a, 1), (1, 1, a)$ に対し, 以下の問いに答えよ.

ただし, $a \neq 1$ とする.

(i) 3 点が作る三角形の面積を求めよ.

(ii) 3 点を通る平面の方程式を求めよ.

(iii) 問 (ii) の平面が, 原点を中心とする半径 1 の球に接する時の a の値を求めよ.

(4) 以下の関数で定義される矩形波のフーリエ正弦変換を求めよ.

(i) $f_1(x) = \begin{cases} -1 & (-\pi < x < 0) \\ 0 & (x = 0,\ |x| \geq \pi) \\ 1 & (0 < x < \pi) \end{cases}$

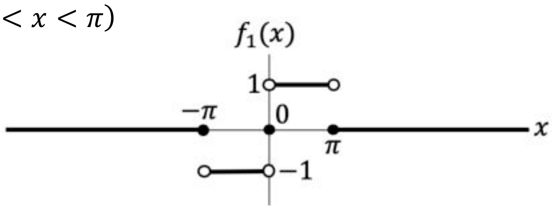

図 1

(ii) $f_n(x) = \begin{cases} (-1)^k & (-k\pi < x < (1-k)\pi\ ) \\ 0 & (\ x = 0,\ x = \pm k\pi,\ |x| > n\pi\ ) \\ (-1)^{k-1} & (\ (k-1)\pi < x < k\pi\ ) \end{cases}$

n は任意の自然数で, k は $k \leq n$ を満たすすべての自然数とする.

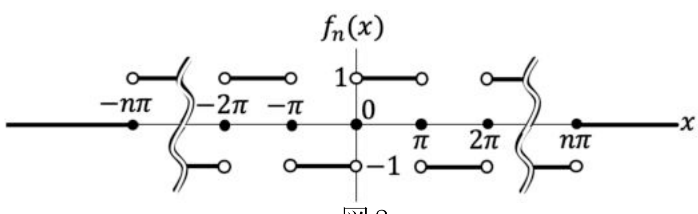

図 2