

令和4年度  
(2022年度)

東北大学大学院理学研究科  
博士課程前期2年の課程  
地球物理学専攻一般選抜入学試験

筆記試験問題

数物系科目：[1]－[7]

(表紙も含めて14枚)

令和3年8月18日

## 数物系科目

1. 数物系科目の問題は [1] から [7] まで7問ある. そのうち4問を選んで解答すること.
2. 答えは, 問題ごとに別々の解答用紙に記入し, 各解答用紙の上端に, 問題番号 (1カ所) と受験番号 (1カ所) を記入すること.
3. 答えが白紙の場合でも, 必ず解答用紙に問題番号と受験番号を記入して提出すること.
4. 答えには, 計算の過程などの解答に至る根拠を記すこと. 問題文に特に指示がある場合には, それに従うこと.
5. 問題紙, 解答用紙, 草案用紙は持ち帰らないこと.

[ 1 ] 図1のように、糸の先についた質量  $m$  の質点が、鉛直軸を含む平面内において、 $O$  を支点として運動している。ここで、支点を介してリールで糸の巻き上げ・繰り出しを行うことで、支点と質点の間の距離  $l$  を時間変化させる場合を考える。糸は伸び縮みせず、たわまないものとし、糸の質量や、糸と質点にかかる空気抵抗は無視できるものとする。糸が鉛直下方となす角を  $\theta$ 、重力加速度を  $g$  とする。次の問いに答えよ。

- (1) 図1の極座標系  $(r, \theta)$  における加速度ベクトルの  $r$  成分と  $\theta$  成分が、それぞれ  $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ ,  $2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$  と表せることを示せ。
- (2) 糸の張力を  $S$  として、質点の運動方程式の  $r$  成分と  $\theta$  成分を示せ。
- (3) 距離  $l$  が、時刻  $t = 0$  で  $l_0$  の状態から一定速度  $c$  で変化する場合を考える。  $c > 0$  のとき  $l$  が長くなるとして、次の問いに答えよ。

- (i)  $\theta$  に関する以下の方程式が成り立つことを示せ。ここで  $\theta$  は微小であると近似する。

$$\ddot{\theta} + \frac{2c}{l}\dot{\theta} + \omega^2\theta = 0 \quad \text{where} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad \text{①}$$

- (ii) ①式において、 $l$  の変化は微小であるとして、 $l \cong l_0$  と近似する。ここで、 $\theta = e^{\lambda t}$  とおくことで、 $\lambda$  が満たすべき方程式（特性方程式）を求めよ。
- (iii) 問(ii)の結果に基づき、 $\theta$  の時間変化に関する一般解を求めよ。ただし、 $|c|$  は十分に小さく、 $|c|/l_0 < \omega$  とする。なお、振幅と角度に関する任意定数をそれぞれ  $A$ ,  $\alpha$  として、一般解に用いること。
- (iv) 問(iii)の結果に基づき、 $l$  をゆっくりと長くしていく場合と短くしていく場合のそれぞれにおける質点の運動の特徴を説明せよ。
- (v) 問(iii)の結果に基づき、 $l$  をゆっくりと  $\Delta l$  だけ短くする場合、張力がする仕事の振動1周期あたりの時間平均値を、 $m$ ,  $g$ ,  $A$ ,  $\Delta l$  を用いて表せ。ここで、 $\Delta l$  は  $l_0$  に比べて十分に小さいという近似のもとで導出を行うこと。

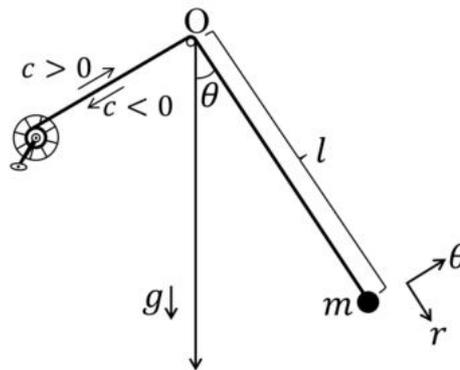


図1

[ 2 ] 気体定数を  $R$ ，単原子理想気体の比熱比を  $\gamma$  とする．その他必要な変数を定義して使用してもよい．次の問いに答えよ．

(1) 理想気体 1 モルが状態 1 (温度  $T_1$ ，圧力  $p_1$ ，体積  $V_1$ ) から状態 3 (温度  $T_3$ ，圧力  $p_3$ ，体積  $V_3$ ) に変化したときのエントロピーの変化を求める．そのために状態 2 (温度  $T_2$ ，圧力  $p_2$ ，体積  $V_2$ ) を考えて，状態 1 から状態 2 に準静的断熱変化，さらに状態 2 から状態 3 に準静的等温変化させる．

(i)  $V_2$  を， $R$ ， $T_1$ ， $T_3$ ， $p_1$ ， $p_3$ ， $V_1$ ， $V_3$ ， $\gamma$  から必要なものを用いて表せ．

(ii) 状態 1 から状態 2 に変化したとき，状態 2 から状態 3 に変化したとき，それぞれのエントロピーの変化を， $R$ ， $V_1$ ， $V_2$ ， $V_3$  から必要なものを用いて表せ．

(iii) 問 (ii) の結果を用いて，状態 1 から状態 3 に変化したときのエントロピーの変化  $\Delta S_{13}$  が①式のように表せることを示せ．

$$\Delta S_{13} = \frac{R}{\gamma - 1} (\ln p_3 V_3^\gamma - \ln p_1 V_1^\gamma) \quad \text{①}$$

(2) 断熱容器に漏れのない仕切りを設け，体積が  $V_1$  と  $V_2$  の 2 つの部屋に分けた．体積  $V_1$  の部屋に 1 モルの単原子理想気体 A (温度  $T_1$ ，圧力  $p_1$ ) を入れ，体積  $V_2$  の部屋を真空にし，仕切りを取り外して断熱自由膨張させたところ，温度  $T_2$ ，圧力  $p_2$ ，体積  $V$  ( $V = V_1 + V_2$ ) になった．このときの  $T_1$  と  $T_2$  の関係を示せ．また，断熱自由膨張によるエントロピー変化を  $V_1$ ， $V_2$  を用いて表すことにより，この過程が不可逆変化であることを示せ．

[ 2 ] は次ページに続く

- (3) 問(2)の体積  $V_1$  の部屋に単原子理想気体 A (分子数  $N_1$ , 分子の質量  $m_1$ ), 体積  $V_2$  の部屋に A とは異なる単原子理想気体 B (分子数  $N_2$ , 分子の質量  $m_2$ ) を入れ, 両者の温度  $T$ , 圧力  $p$  を一定に保つ (状態 1). 次に仕切りを取り外して部屋の体積を  $V$  ( $V = V_1 + V_2$ ) とすると両者は混合し平衡状態に達した (状態 2).

- (i) 統計力学では単原子理想気体のヘルムホルツの自由エネルギー  $F$  は②式のように表すことができる.

$$F = -kT \ln \left[ \frac{V^N}{N!} \left( \frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{\frac{3N}{2}} \right] \quad \text{②}$$

ここで,  $T$ ,  $N$ ,  $k$ ,  $m$ ,  $h$ ,  $V$  はそれぞれ温度, 分子数, ボルツマン定数, 分子の質量, プランク定数, 体積を示す. ②式を用いて, 状態 1 での単原子理想気体 A のエントロピー  $S_A$  を求めよ.

- (ii) 単原子理想気体 A, B の混合 (状態 1 から状態 2 への変化) によるエントロピーの変化  $\Delta S$  を,  $T$ ,  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $k$ ,  $h$ ,  $V_1$ ,  $V_2$  から必要なものを用いて表せ. 導出した  $\Delta S$  を問(2) のエントロピー変化と比較することにより, 混合によるエントロピー変化についてわかることを述べよ.

[ 3 ] 一様な深さ  $H$  の海で起こる自由表面の波動を考える．海水は密度  $\rho$  の非圧縮完全流体である．流れは渦なしで，速度ポテンシャルを  $\phi$  とする．図 1 のように  $z$  軸を鉛直上向き，静止状態のときの自由表面を  $z = 0$ ，運動は  $xz$  平面内のみで起こるとする．海面での大気圧は一定，重力加速度を  $g$ ，時間を  $t$ ，自由表面の  $z$  方向の変位を  $\eta$  とする．次の問いに答えよ．

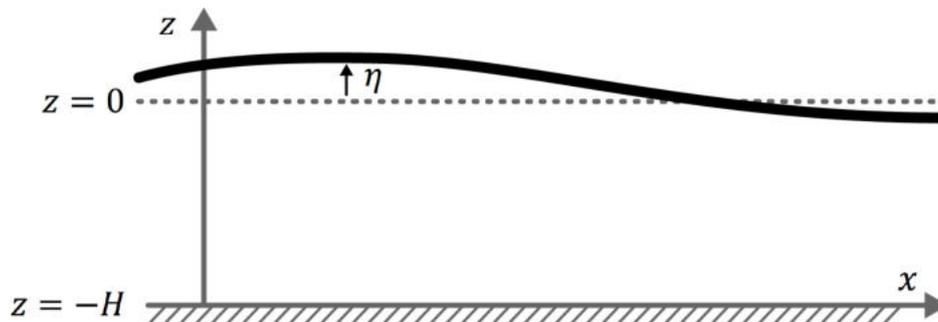


図 1

- (1) 次の関係式が成り立つことを示せ．

$$\nabla^2 \phi = 0$$

- (2) 海底における境界条件が，①式で表せることを示せ．

$$z = -H \text{ において } \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{①}$$

- (3) 海面の流体粒子は時間が経過しても海面に存在する．海面での境界条件(運動学的境界条件)が，②式で表せることを示せ．

$$z = \eta \text{ において } \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad \text{②}$$

- (4) 圧力のつり合いをもとに力学的境界条件を考える．海面での境界条件(力学的境界条件)が，③式で表せることを示せ．

$$z = \eta \text{ において } \eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{2g} |\nabla \phi|^2 \quad \text{③}$$

[ 3 ] は次ページに続く

- (5) 微小振幅波を考える．波動解  $\phi(x, z, t) = \alpha(z) \cos(kx - \omega t)$  を仮定し，境界条件①~③を適用すると分散関係式は④式の形になる．ただし， $k$  は  $x$  方向の波数， $\omega$  は角振動数である．次の問いに答えよ．必要に応じて  $g = 10 \text{ m/s}^2$  と近似してよい．なお，図 2 は  $\tanh$  関数を表し，その漸近形は表 1 に従うとする．

$$\omega = \sqrt{gk \tanh(kH)} \quad \text{④}$$

- (i) 波長に比べて海が十分に深いとき (深水波近似)，波の位相速度が  $\sqrt{g/k}$  となることを示せ．
- (ii) 問 (i) の深水波近似の位相速度が，④式から深水波近似をせずに導かれた位相速度と 1% 程度の誤差で一致するには， $H$  が半波長以上であれば十分であることを示せ．必要ならば  $\tanh(2.6) = 0.98$  を用いてよい．
- (iii) ハワイのビッグウェーブは南極海から来ることがある．南極海で発生した周期 20 秒の深水波がハワイに到達するまでの時間を答えよ．なお，南極海からハワイまでの距離を 10,000 km とする．
- (iv) 地震による津波を浅水波とみなす．南極海で発生した津波がハワイに到達するまでの位相速度は問 (iii) の深水波の場合の何倍か答えよ．ただし，海の深さは 4,000 m とする．

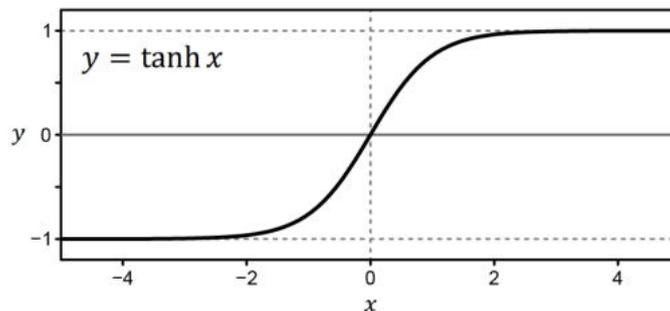


図 2

表 1

	$x \rightarrow 0$	$x \rightarrow \infty$
$\tanh x$	$x$	1

[ 4 ] 真空中の光速  $c_0$  を実験的に求めることについて考えてみよう．国際単位系(SI)では，真空の誘電率  $\epsilon_0$  と透磁率  $\mu_0$  を用いて  $c_0 = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$  であることに着目し，自作のコンデンサとコイル，および，既製の抵抗と信号源からなる交流回路を用いた実験から  $c_0$  を求めることとする．空気中の透磁率と誘電率は真空と同じ値として次の問いに答えよ．ただし，コンデンサは 2 枚の平行導体板からなる空気コンデンサとし，極板の面積を  $S$ ，間隔を  $d$  とする．コイルは空芯で，単位長さ当りの巻き数  $n$ ，半径  $a$ ，長さ  $l$  のソレノイドとする．

(1) コイルには電流  $I$  が流れているとして，問(i)から(iv)に答えよ．

- (i) 空気コンデンサの静電容量  $C$  を示せ．
- (ii) ソレノイドの中心軸を  $z$  軸とし，その上の点を  $P$  とする (図 1)．ソレノイドの  $z$  と  $z + dz$  間のコイルにより点  $P$  に生じる磁束密度  $dB$  は①式で表せることを示せ．

$$dB = \frac{\mu_0 I a^2 n dz}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} \quad \text{①}$$

- (iii) 図 1 のようにソレノイドの両端と点  $P$  を結ぶ線の  $z$  軸とのなす角を  $\theta_1$ ， $\theta_2$  とするとき，点  $P$  における磁束密度  $B$  は②式で表せる．

$$B = \frac{\mu_0 n I (\cos\theta_2 - \cos\theta_1)}{2} \quad \text{②}$$

$l$  が  $a$  に対し十分大きく，ソレノイド内の磁束密度は無限に長いソレノイド内の磁束密度とよい近似で一致する場合について，問(a)から(c)に答えよ．

- (a) 点  $P$  がソレノイドの  $z$  軸上中央にある場合について，点  $P$  における磁束密度を求めよ．
- (b) ソレノイド内の磁束密度は一様であることをアンペールの法則を用いて説明せよ．適当な図を用いて説明してもよい．
- (c) ソレノイドの自己インダクタンス  $L$  を求めよ．
- (iv) 自作するソレノイドの  $z$  軸上中央における磁束密度と，問(iii)-(a)で求めた磁束密度との差異を 20%以内をしたい． $l$  は  $a$  の何倍以上にすればよいか．その最小値としてもっとも適切な数値を次の括弧の中から 1 つ選べ．導出過程も記すこと．

[ 12, 8, 5, 3, 2 ]

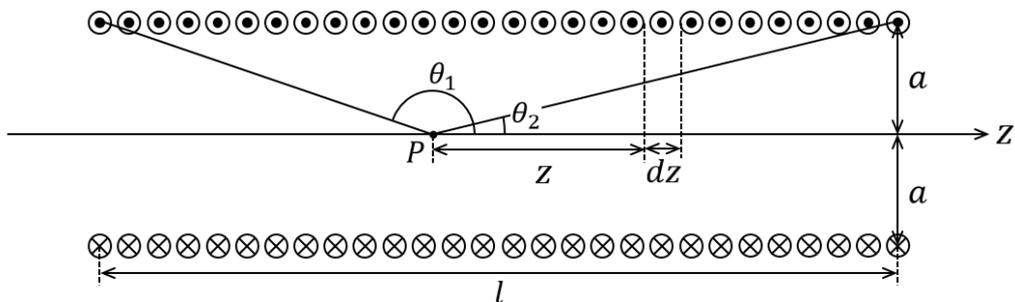


図 1

[ 4 ] は次ページに続く

(2) 自作した静電容量  $C$  のコンデンサと自己インダクタンス  $L$  のソレノイド, および, 抵抗値  $R$  の抵抗と交流信号源を用いて交流回路を作製した (図 2). 交流信号源の静電容量, 自己インダクタンス, 抵抗は無視できるとして, 問 (i) から (iii) に答えよ.

- (i) 交流信号源は, 電圧振幅を  $V_0$ , 角周波数を  $\omega$ , 時間を  $t$  として,  $V(t) = V_0 \sin \omega t$  の電圧を回路に与えているとする. このとき回路に流れる電流  $I(t)$  は③式を満たすことを示せ.

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = \omega V_0 \cos \omega t \quad \text{③}$$

- (ii) 回路に信号を与え始めて十分時間が経った後の電流  $I(t)$  は  $I(t) = I_0 \sin(\omega t - \varphi)$  と表すことができる.  $I_0$  を  $V_0, L, R, C, \omega$  で示し,  $I_0$  を最大にする角周波数 (共振角周波数)  $\omega_0$  を求めよ. また,  $\omega_0$  と問 (1) の (i), および, (iii)-(c) で求めた関係式を用いて, 光速  $c_0$  は④式で求められることを示せ.

$$c_0 = \omega_0 n a \sqrt{\frac{\pi l S}{d}} \quad \text{④}$$

- (iii) 実験では,  $d$  には 8%,  $l$  には 5%,  $\omega_0$  には 3% の計測誤差が見込まれる一方,  $n, a, S$  の計測誤差は無視できるものとする.  $d, l, \omega_0$  のうち, その計測誤差が実験で得られる光速の値にもっとも影響すると想定される計測量はどれか. 理由を付して答えよ.

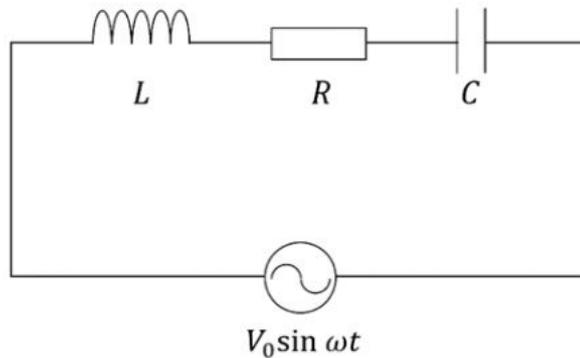


図 2

[ 5 ] ①式に示すような一次元ポテンシャル  $V(x)$  に束縛された粒子を考える.

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & (x < -d) \\ 0 & (-d \leq x \leq d) \\ V_0 & (x > d) \end{cases} \quad \text{①}$$

ここで,  $d > 0$ , 粒子の質量を  $m$ , エネルギーを  $E$  ( $V_0 > E > 0$ ) とする. 波動関数  $\Psi(x)$  が満たすシュレディンガー方程式は以下のように表すことができる.

$$\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + k_1^2\Psi(x) = 0 \quad (-d \leq x \leq d) \quad \text{②}$$

$$\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} - k_2^2\Psi(x) = 0 \quad (x < -d, x > d) \quad \text{③}$$

ここで,  $k_1 > 0$ ,  $k_2 > 0$  とする. 次の問いに答えよ.

- (1)  $k_1$  と  $k_2$  を,  $E$ ,  $m$ ,  $V_0$  ならびに定数  $\hbar = h/2\pi$  ( $h$  はプランク定数) を用いて示せ.
- (2) ①式に示すポテンシャルの下では,  $\Psi(x)$  が偶関数である場合と奇関数である場合のいずれにおいてもシュレディンガー方程式を満たすことを示せ.
- (3)  $\Psi(x)$  は以下のように表すことができる (ここで  $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$  は定数).

$$\Psi_1(x) = A_1 \exp(k_2x) + B_1 \exp(-k_2x) \quad (x < -d) \quad \text{④}$$

$$\Psi_2(x) = A_2 \exp(ik_1x) + B_2 \exp(-ik_1x) \quad (-d \leq x \leq d) \quad \text{⑤}$$

$$\Psi_3(x) = A_3 \exp(k_2x) + B_3 \exp(-k_2x) \quad (x > d) \quad \text{⑥}$$

次の問いに答えよ.

- (i) ④~⑥式で表される粒子の振る舞いには, 古典力学では記述できない量子力学的効果が現れる. この量子力学的効果について, 古典力学から期待される振る舞いと比較しながら, 100 字程度で述べよ.
- (ii) 無限遠方  $|x| \rightarrow \infty$  における境界条件を適用し,  $B_1$  と  $A_3$  の値を求めよ.
- (iii)  $|x| = d$  における境界条件から,  $k_1$  と  $k_2$  の間に成り立つ関係を示せ.
- (iv) 束縛状態がただ一つ存在する条件と, 二つ存在する条件をそれぞれ示せ. また, 束縛状態が二つ存在するとき,  $\Psi(x)$  の概形をそれぞれ図示せよ.
- (v) 束縛状態が二つ存在するとき, 問 (i) で述べた量子力学的効果について, 二つの束縛状態の間にどのような違いが現れるか 50 字程度で述べよ.

[ 6 ] 3次元直交直線座標系  $O-xyz$  における弾性体の微小変形を考える. 次の問いに答えよ.

(1) 変位場が①式で与えられたとする. ただし  $\mu$  は定数である. 次の問いに答えよ.

$$\begin{cases} u_x = \frac{1}{2\mu}(4x - y + 3z) \\ u_y = \frac{1}{2\mu}(x + 7y) \\ u_z = \frac{1}{2\mu}(-3x + 4y + 4z) \end{cases} \quad \text{①}$$

- (i) 歪テンソル  $e_{ij}$  (ただし,  $i, j = x, y, z$ ) の各成分を求めよ.
- (ii) 問 (i) で求めた歪テンソル  $e_{ij}$  の主歪と主軸の方向を求めよ.
- (2) 主応力  $\sigma_i$  (ただし,  $i = 1, 2, 3$ ) に対応する主軸が,  $x$  軸,  $y$  軸,  $z$  軸とそれぞれ平行である応力場を考える.  $\sigma_1 > \sigma_2 > 0 = \sigma_3$  のとき, 次の問いに答えよ.
- (i)  $z$  軸に平行な面であつ, その法線が  $x$  軸と  $\theta$  の角度をなす面に作用する法線応力  $N$  とせん断応力  $S$  を,  $\sigma_i$  および  $\theta$  を用いてそれぞれ表せ.
- (ii) 問 (i) で定義した面において, せん断応力  $S$  の絶対値  $|S|$  が最大となるときの  $\theta$  を求めよ. ただし  $0 \leq \theta < \pi$  とする.

[ 6 ] は次ページに続く

- (3)  $z = 0$  に置かれた薄い長方形の板について考える．この場合のエアリーの応力関数が②式で与えられるものとする．

$$\phi(x, y) = \frac{a}{6}x^3 + \frac{b}{2}x^2y + \frac{c}{2}xy^2 + \frac{d}{6}y^3 \quad \text{②}$$

体積力は  $0$  として，次の問いに答えよ．

- (i) ②式が重調和関数であることを示せ．
- (ii) エアリーの応力関数が重調和関数であることの物理的な意味を，応力と歪の観点から 40 文字程度で述べよ．
- (iii) 応力成分  $(\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy})$  を求めよ．
- (iv) ②式の係数が  $a = b = c = 0$  の場合，この問題は図 1 に示すような曲げモーメント  $M$  で変形する「板の単純曲げ」に相当する．このときの応力成分  $(\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy})$  を求め，板の内部における応力場の特徴を簡潔に説明せよ．必要であれば図を用いてもよい．

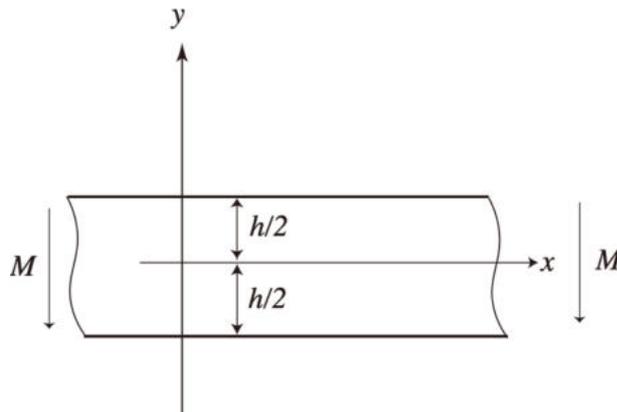


図 1

[ 7 ] 次の問いに答えよ.

(1) 以下の行列の逆行列を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(2) 以下の微分方程式を解け.

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + x + (x + x^2)e^{-y}$$

(3) 以下の積分を求めよ. 問 (ii) は, 必要であれば図1を用いよ.

(i)  $\int e^x \cos x \, dx$

(ii)  $\iint_D \frac{xy}{x^2 + y^2} \, dx dy \quad D = \left\{ (x, y) \mid y > 0, \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right\}$

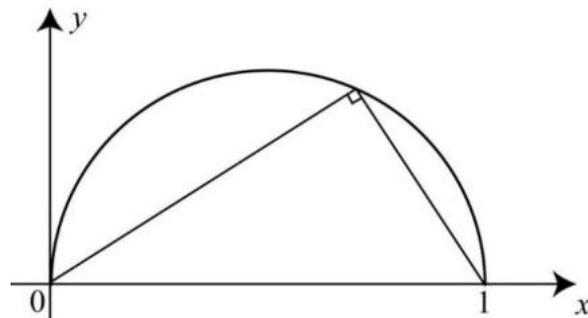


図1

(4) 「おもて」が出る確率と「うら」が出る確率とが等しいコインを  $m$  枚同時に投げる試行について考える. 以下の問いに答えよ.

(i)  $m$  枚のコインを同時に投げたとき,  $m$  枚とも「おもて」となる確率  $p$  を求めよ.

(ii)  $m$  枚のコインを同時に投げる試行を  $n$  回繰り返すとき,  $m$  枚とも「おもて」となる事象が  $k$  回起こる確率  $P(k)$  を求めよ.

[ 7 ] は次ページに続く

(iii) 問 (i) の確率  $p$  がとても小さく, 試行回数  $n$  が十分大きいとき, 問 (ii) の確率  $P(k)$  がパラメータ  $\lambda = np$  のポアソン分布に近似的に従うことを示せ.

(iv) 10 枚のコインを同時に投げる試行を 2048 回繰り返すとき, 10 枚とも「おもて」となる事象が 2 回以上起こる確率を求めよ. その際, 表 1 を用いよ.

表 1 ポアソン分布表の抜粋

$k \backslash \lambda$	1.00	2.00	3.00
0	0.36788	0.13534	0.04979
1	0.36788	0.27067	0.14936
2	0.18394	0.27067	0.22404
3	0.06131	0.18045	0.22404
4	0.01533	0.09022	0.16803
5	0.00307	0.03609	0.10082
6	0.00051	0.01203	0.05041
7	0.00007	0.00344	0.02160
8	0.00001	0.00086	0.00810