令和５年度

（２０２３年度）

東北大学大学院理学研究科
博士課程前期２年の課程
地球物理学専攻一般選抜入学試験

筆記試験問題

数物系科目：［１］–［７］

（表紙も含めて１３枚）

令和４年８月１８日

数 物 系 科 目

1. 数物系科目の問題は［１］から［７］まで７問ある．そのうち４問を選んで解答すること．
2. 答案は，問題ごとに別々の解答用紙に記入し，各解答用紙の上端に，問題番号（１ヵ所）と受験番号（１ヵ所）を記入すること．
3. 答案が白紙の場合でも，必ず解答用紙に問題番号と受験番号を記入して提出すること．
4. 答案には，計算の過程などの解答に至る根拠を記すこと．問題文に特に指示がある場合には，それに従うこと．解答用紙の裏面にも答案を記入してよい．
5. 問題紙，解答用紙，草案用紙は持ち帰らないこと．

［ 1 ］ 図 1 のように，半円筒が水平に固定されており，その内側を質量 M，半径 a の密度一様である剛体円柱が半円筒の底を中心に往復運動している．この円柱の運動に関し，次の問いに答えよ．なお，円柱および半円筒の中心軸は紙面に垂直で，半円筒の中心 O から円柱の中心 G までの距離を R，鉛直下向き（x 軸）からの角度を θ とする．円柱の回転運動については，G を原点とし，鉛直下向きからの回転角を φ とする．角度 θ は反時計回りを正, 角度 φ は時計回りを正とする. 鉛直下向きの重力加速度を g とする．

(1) 円柱と半円筒の間に摩擦力 F が働き，円柱は半円筒上をすべらずに転がる場合を考える．

(i) 円柱の中心軸まわりの慣性モーメントは $\frac{1}{2}Ma^2$ であることを示せ.

(ii) $\theta > 0$ のとき，円柱に働く θ 方向の力を図示せよ．

(iii) 円柱の重心運動に関する θ についての運動方程式を示せ.

(iv) 円柱の回転運動に関する φ についての運動方程式を示せ.

(v) $F = -\frac{1}{2}MR\ddot{\theta}$ となることを示せ.

(vi) 往復運動の振幅が小さい場合にこの運動が単振動になることを示せ．また，この単振動の周期 T を求めよ．

(2) 円柱と半円筒の間に摩擦力が働かない場合を考える．往復運動の振幅が小さい場合，円柱の運動は単振動になる．その周期は問(1)(vi)の値と比べてどうなるか. 問(1)の設定との違いを念頭に，理由とともに答えよ．

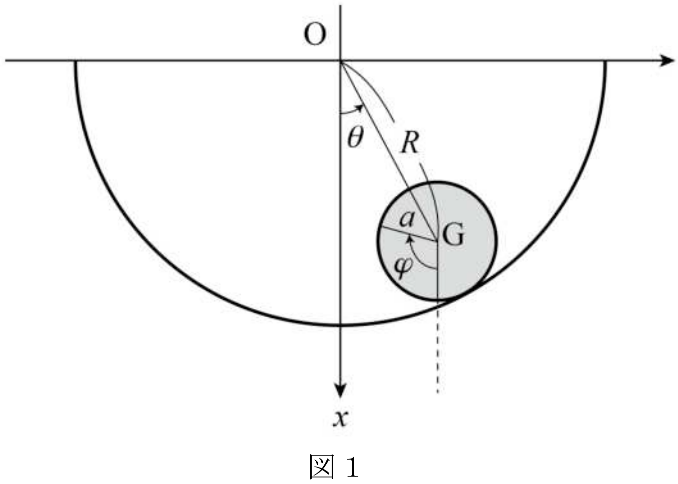

図 1

［ ２ ］ 以下の問いに答えよ．必要な変数を定義して使用してよい．

(1)　１モルの理想気体（気体定数は R）を作業気体として，以下の準静的な過程１から４のサイクルからなる熱機関を考える．

過程１　温度を T_1 に保ちながら，圧力が P_1 から P_2 に変化する等温膨張

過程２　温度が T_1 から T_2 に，圧力が P_2 から P_3 に変化する断熱膨張

過程３　温度を T_2 に保ちながら，圧力が P_3 から P_4 に変化する等温圧縮

過程４　温度が T_2 から T_1 に，圧力が P_4 から P_1 に変化する断熱圧縮

次の問いに答えよ．

(i)　過程１において，内部エネルギーの変化と熱機関がなす仕事を R, T_1, P_1, P_2 を使ってそれぞれ表せ．

(ii)　理想気体を体積一定で変化させる場合の比熱 C_v と，圧力一定で変化させる場合の比熱 C_p の間には $C_p = C_v + R$ の関係がある．$\gamma = C_p / C_v$ として，過程２と４では $P^{1-\gamma}T^{\gamma}$ が一定となることを示せ．

(iii)　横軸をエントロピー，縦軸を温度として，この熱機関のサイクルの概形を図示せよ．また，過程１から４が図中のどの部分に対応するか示せ．

(iv)　この熱機関の熱効率を求めよ．

(v)　サイクルの各過程において熱機関がなす仕事は，以下の①から④のうち，どの熱力学関数の変化に対応するか，過程１，２，３，４について，それぞれ答えよ．

①　内部エネルギー

②　エンタルピー

③　ヘルムホルツの自由エネルギー

④　ギブスの自由エネルギー

(vi)　問 (ii) で用いた γ は，単原子分子では 5/3 になることを，気体の分子運動の観点より示せ．

［ ２ ］は次ページに続く

(2) 海上にある発達した台風を問 (1) のような理想気体の熱機関としてモデル化する．台風の中心から外側に向かって横切る鉛直断面（図１）に記された４つの矢印（A〜D）は，問 (1) のサイクルのうち，いずれかの過程に対応する空気塊のゆっくりとした動きを表す．熱機関が行う仕事 W が台風内部の大気運動を駆動し, 矢印（A〜D）と直交する方向に風速 v をもつ大気の水平運動を生ずるとする．大気下層の気温を T_D，上層の気温を T_U，海面水温を T_S とする. さらに,

・台風に単位時間あたりに注入される熱 Q について　　$Q \propto v\,(T_S - T_D)$

・台風内部の大気運動が単位時間あたりに失う運動エネルギー ε について　　$\varepsilon \propto v^3$

という関係があり, $W = \varepsilon$ を満たす定常状態にあるとする.

$T_S = 301$ K,　$T_D = 300$ K,　$T_U = 251$ K のとき，$v = 35$ m/s であった. 次の問いに答えよ.

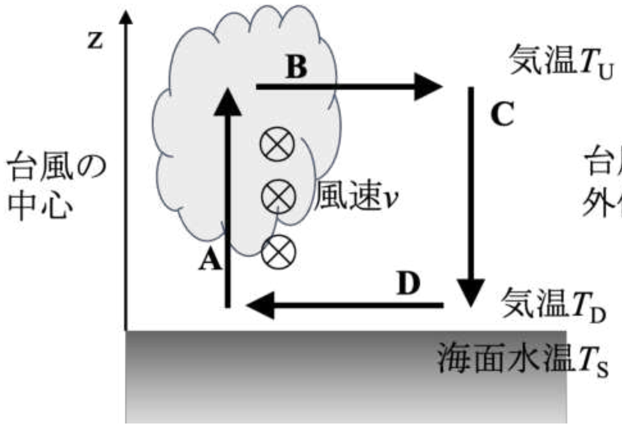

図１.

(i) 図１の矢印 D は，大気下層の空気塊が，一定の温度 T_D を保ちながら，台風の中心に向かう過程を表す．これは問 (1) の過程１から４のうち，どれに対応するか答えよ.

(ii) $W = \varepsilon$ であることを利用し，v，T_S，T_D および T_U の間の関係を示せ.

(iii) T_D と T_U はそのままで，T_S が 304 K である場合の v を求めよ.

(iv) T_S と T_D はそのままで，T_U が 236 K である場合の v を求めよ.

［ 3 ］非圧縮粘性流体の２次元的な流れを考える．ここでは，流れの記述に，円柱座標（r, θ, z）を用いる．

流れの速度の，動径（r）方向成分 u_r，偏角（θ）方向成分 u_θ，z 方向成分 u_z が，それぞれ，$u_r = 0$，$u_\theta = v$，$u_z = 0$ と表せるとき，以下の問いに答えよ．ここで，v は，r のみ，あるいは，r と時間 t のみの関数である．密度を ρ，粘性率を μ，圧力を p とする．渦度ベクトルの z 方向成分を ω とする（以下，ω を渦度と呼ぶ）．外力は無視する．必要であれば次の公式を用いよ．

公式

r, θ 方向のナビエ・ストークスの式（外力を無視）：

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\mu}{\rho}\left(\Delta u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right) \qquad \text{(A)}$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{u_r u_\theta}{r} = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\mu}{\rho}\left(\Delta u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) \qquad \text{(B)}$$

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

流速ベクトル $\mathbf{v}$ の回転（$\mathbf{e}_r$，$\mathbf{e}_\theta$，$\mathbf{e}_z$: r, θ, z 方向の単位ベクトル）：

$$\nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial r u_\theta}{\partial z}\right)\mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}\right)\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial r u_\theta}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)\mathbf{e}_z \qquad \text{(C)}$$

(1) 設問の条件を反映させた r 方向の運動方程式を示せ．

(2) $\dfrac{\partial p}{\partial \theta} = 0$ となることを示せ．

(3) 渦度 ω について，次の①式が成り立つことを示せ．

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \omega}{\partial r}\right) \qquad ①$$

(4) 流れは定常とする．$\omega = Cr^n$ のときの流れが，渦なし渦（$v \propto \dfrac{1}{r}$）と剛体的な回転（$v \propto r$）の組み合わせとなることを示せ．ただし，C は実数の定数（$C \neq 0$），n は整数である．

［ 3 ］は次ページに続く

(5)　流れは非定常とする．時刻 t（$t > 0$）において

$$v = \frac{\Gamma}{2\pi r}\left[1 - \exp\left(-\frac{\rho r^2}{4\mu t}\right)\right] \qquad ②$$

であるとき，次の問いに答えよ．ただし，Γ は正の定数（$\Gamma > 0$）であり，$\lim_{r \to 0} v = 0$ である．

(i)　$0 < r \ll \sqrt{\frac{4\mu t}{\rho}}$ の流れは，近似的に，剛体的な回転とみなせるか，それとも渦なし渦とみなせるか，根拠を提示して答えよ．必要であれば $e^x \approx 1 + x$　$(|x| \ll 1)$ を用いよ．

(ii)　ある時刻 t_1 における流速分布の概形を，横軸を r，縦軸を v として図示せよ．なお，図では，時刻 t において $\frac{dv}{dr} = 0$ となる $r = r_0$ が $r_0 \approx \sqrt{\frac{5\mu t}{\rho}}$ となることを用いてよい．

(iii)　問(ii)の時刻 t_1 の状態から時間が経過し，時刻 t_2 となったとする．v がどのように変化するかを説明するとともに，時刻 t_2 における流速分布の概形を問(ii)の図に描き加えよ．その際，線の種類を変えるなどして，２つの流速分布の違いが明瞭となるように工夫をすること．

［ ４ ］　図 1 のように，真空中（誘電率ε_0，透磁率μ_0）で，平行平板コンデンサ（静電容量 C ）と抵抗 R を導線で接続する．座標系は円柱座標系 (r, ϕ, z) をとる．$\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z$ はそれぞれ r, ϕ, z 方向の単位ベクトルである．コンデンサの円形極板 $\mathrm{P_A}$，$\mathrm{P_B}$（半径 a）の中心は，z 軸上の点 $(0, 0, d)$ および原点で固定されている．コンデンサの極板および導線の抵抗は 0 であるとし，また，コンデンサ，抵抗，導線のインダクタンスおよび抵抗と導線の静電容量は十分小さく，無視できるとする．導線の途中に設けたスイッチを OFF にして，極板 $\mathrm{P_A}$ に $+Q_0$，極板 $\mathrm{P_B}$ に $-Q_0$（$Q_0 > 0$）の電荷を与え，時刻 $t = 0$ にスイッチを ON にした．以下の問いに答えよ．

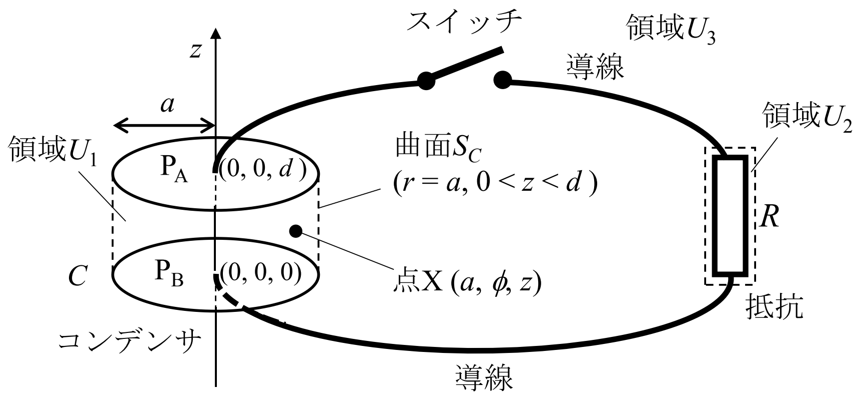

図 1

(1)　時刻 $t = 0$ にコンデンサが蓄えている静電エネルギーを求めよ．

(2)　時刻 t（$t > 0$）での極板 $\mathrm{P_A}$ の電荷 $Q(t)$ を求めよ．

(3)　抵抗 R で消費されるジュール熱 $\dfrac{V^2}{R}$（V は抵抗にかかる電圧）を時刻 $t = 0$ から∞の範囲で積分し，それが問(1)で求めたコンデンサの静電エネルギーと一致することを示せ．また，その物理的意味を簡潔に答えよ．

(4)　$\mathrm{P_A}$，$\mathrm{P_B}$ で挟まれたコンデンサの外周面（ $r = a$，$0 < z < d$ ）を曲面 S_C とする．$\mathrm{P_A}$，$\mathrm{P_B}$ 間の電場が一様とみなすと，曲面 S_C 上の点 X (a, ϕ, z) における時刻 t（$t > 0$）の電場は $\mathbf{E} = -\dfrac{Q(t)}{\varepsilon_0 \pi a^2}\mathbf{e}_z$ となる．$\mathbf{E}$ がガウスの法則を満たすことを確かめよ．解答には，ガウスの法則を適用した領域と閉曲面を図示すること．

［ 4 ］は次ページに続く

(5)　曲面 S_C 上の点 X (a, ϕ, z) での時刻 t（$t>0$）の磁場は $\mathbf{B} = -\dfrac{\mu_0}{2\pi a}\dfrac{dQ(t)}{dt}\mathbf{e}_\phi$ となる．**B** がアンペール・マクスウェルの法則を満たすことを確かめよ．解答には，アンペール・マクスウェルの法則を適用した曲面と閉曲線を図示すること．

(6)　問(2)，(4)，(5)の結果をもとに，曲面 S_C から外に向かうポインティングベクトル $\dfrac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{\mu_0}$ の面積分を，時刻 t（$t>0$）の関数として求めよ．また，それが時刻 t に抵抗 R で消費されるジュール熱と一致することを確かめよ．

(7)　コンデンサの極板 $\mathrm{P_A}$，$\mathrm{P_B}$ および曲面 S_C が囲む領域を U_1，抵抗 R のみを囲む領域を U_2，導線を含むそれ以外の領域を U_3 とする．各領域に以下のポインティングの定理を適用したとき，U_1～U_3 の各領域で①，②，③の各項に該当するものは具体的に何か．「$U_1$①：コンデンサが蓄える静電エネルギーの減少」の例にならって，「$U_1$②：. . .」，「$U_1$③：. . .」，「$U_2$①：. . .」，……，「$U_3$③：. . .」の形式で，残り８通りについて，それぞれ簡潔に答えよ．該当するものがない項は，「なし」と答えること．

$$\underbrace{-\frac{d}{dt}\int_U\left(\frac{\varepsilon_0|\mathbf{E}|^2}{2}+\frac{|\mathbf{B}|^2}{2\mu_0}\right)dV}_{①} = \underbrace{\int_S\frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{\mu_0}\cdot\mathbf{n}dS}_{②} + \underbrace{\int_U(\mathbf{E}\cdot\mathbf{j})dV}_{③} \qquad \text{（ポインティングの定理）}$$

ただし，U は領域，S は領域 U を囲む閉曲面，**n** は閉曲面 S の法線ベクトル，**E** は電場，**B** は磁場，**j** は電流密度である．

［ 5 ］ 次の問いに答えよ．h はプランク定数（$6.6\times10^{-34}\ \mathrm{m^2\,kg\,s^{-1}}$，$\hbar=\frac{h}{2\pi}$），$\varepsilon_0$ は真空中の誘電率，m は電子の質量，e は素電荷である．

(1) 水素原子の中心からの距離を r とすると，基底状態にある電子の波動関数 $\psi(r)$ は r のみの関数として①式のように表される（C は正の定数）．次の問いに答えよ．必要であれば下の公式を用いよ．

$$\psi(r)=C\mathrm{e}^{-\frac{r}{a}},\quad a=\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2} \qquad ①$$

（公式） $$\int_0^\infty re^{-r}dr=1$$

$$\int_0^\infty r^2e^{-r}dr=2$$

(i) 規格化条件を用いて C を求めよ．

(ii) 運動エネルギー $\hat{T}=\frac{\hat{p}^2}{2m}$ とポテンシャルエネルギー $\hat{V}=-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$ の期待値，ならびに，それらの和である全エネルギーを求めよ．ここで $\hat{p}$ は運動量演算子であり，$\hat{p}^2=-\hbar^2\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial}{\partial r}\right]\right)$ を用いてよい．

(2) 不確定性関係を水素原子に適用して，電子の軌道半径を考える．電子は軌道半径 r の球対称の領域に閉じ込められているとする．また，電子の運動量の大きさを p とすれば，不確定性関係は $r\cdot p\approx\hbar$ で近似的に表現されるとする．次の問いに答えよ．

(i) 電子がもつ全エネルギー E を m, e, ε_0, $\hbar$, r を用いて表せ．

(ii) 電子が基底状態にあるとき，$r=\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2}$ となることを示せ．

(iii) 不確定性関係に基づいて，水素原子の電子が陽子に落ち込まない理由を 80 字程度で説明せよ．

(3) ナトリウム原子が励起状態 ${}^2P_{3/2}$ から基底状態 ${}^2S_{1/2}$ に遷移するとき，中心波長が 5.9×10^{-7} m の輝線を放射する．実験したところ，この励起状態の平均寿命 Δt は 1.0×10^{-8} s，また輝線の振動数の幅（自然幅）は $1.6\times10^{7}\ \mathrm{s^{-1}}$ と計測された．

(i) 輝線に自然幅があることは，励起エネルギー E に幅があることを意味する．この幅 ΔE の値を有効数字 2 桁で求めよ．

(ii) Δt と ΔE は不確定性関係を満たすことを示せ．

［ 6 ］ 3次元直交直線座標系 $0-xyz$ における弾性体の微小変形に関する次の問いに答えよ．

(1) 弾性体が外力を受けて変形すると，その内部には外力がなした仕事に相当するひずみエネルギー（W とする）が蓄えられる．W に関する次の問いに答えよ．ここでは，外力により弾性体内に生じた応力とひずみを σ_{ij} と e_{kl} （ただし，$i,j,k,l=x,y,z$）とし，それらの間に線形の関係が成り立ち，総和規約を用いて $\sigma_{ij}=C_{ijkl}e_{kl}$（ただし，$C_{ijkl}$ は定数）と書けるものとする．

(i) 図1に示すように，各辺の長さがdx，dy，dz の微小直方体に対して，せん断応力 σ_{xy} および σ_{yx} のみが生じ，de_{xy} および de_{yx} だけひずみが増加した場合について考える．このときの単位体積あたりのひずみエネルギーの増分を求めよ．

(ii) すべての応力成分が生じる場合の単位体積あたりのひずみエネルギーの増分を，ひずみとその増分および C_{ijkl} によって，総和規約を用いて示せ.

(iii) 自然状態（$e_{ij}=0$）から，あるひずみの状態（$e_{ij}\neq 0$）に変化したとき，この弾性体に蓄えられる単位体積あたりのひずみエネルギーを，ひずみ成分と応力成分を用いて書き下せ.

(iv) ①式に示す応力とひずみの関係式を用いて， $W=0$ になる条件を示せ.

$$\sigma_{ij}=\frac{E}{1+\nu}\left(\frac{\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}e_{kk}+e_{ij}\right) \qquad ①$$

ここで，E はヤング率， ν はポアソン比，δ_{ij} はクロネッカーのデルタを示す.

(v) ひずみエネルギーの性質を用いて， E が取りうる範囲を示せ.

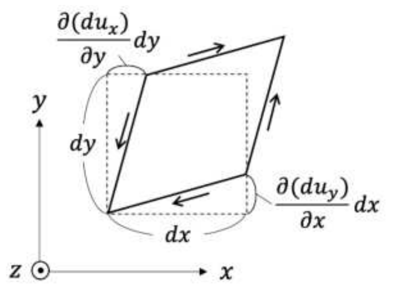

図1 $\boldsymbol{u}=(u_x,u_y,u_z)$ は変位を示す.

［ 6 ］は次ページに続く

(2)　体積力を無視した場合，等方弾性体の運動方程式は②式の通り書ける．次の問いに答えよ．

$$\rho\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} = (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) + \mu\nabla^2\boldsymbol{u} \qquad ②$$

ここで，$\boldsymbol{u}$ は変位ベクトル，ρ は媒質の密度，λ, μ はラメの定数を示す．

(i) ②式は，両辺の発散および回転を取ることで③式と④式で示される波動方程式の形に変形できる．ここで θ と $\boldsymbol{\omega}$ はそれぞれスカラーとベクトルである．③式および④式を導け．

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{\lambda+2\mu}{\rho}\nabla^2\theta \qquad ③$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\omega}}{\partial t^2} = \frac{\mu}{\rho}\nabla^2\boldsymbol{\omega} \qquad ④$$

(ii) ③式と④式で示される波動の特徴を，θ および $\boldsymbol{\omega}$ が $\boldsymbol{u}$ とどのような関係にあるかに着目して，それぞれ述べよ．

［ 7 ］　次の問いに答えよ．

(1)　次の微分方程式を解け．なお，問 (ii) は非自明解を求めること．

(i)　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y-1}{xy}$

(ii)　$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx}=6y_1-3y_2-7y_3 \\ \dfrac{dy_2}{dx}=-y_1+2y_2+y_3 \\ \dfrac{dy_3}{dx}=5y_1-3y_2-6y_3 \end{cases}$

(2)　図 1 のように長径 $2a$，短径 $2b$ の楕円に内接する長方形の面積の最大値を，ラグランジュの未定乗数法を用いて求めよ．ただし，a, b は正の定数とする．

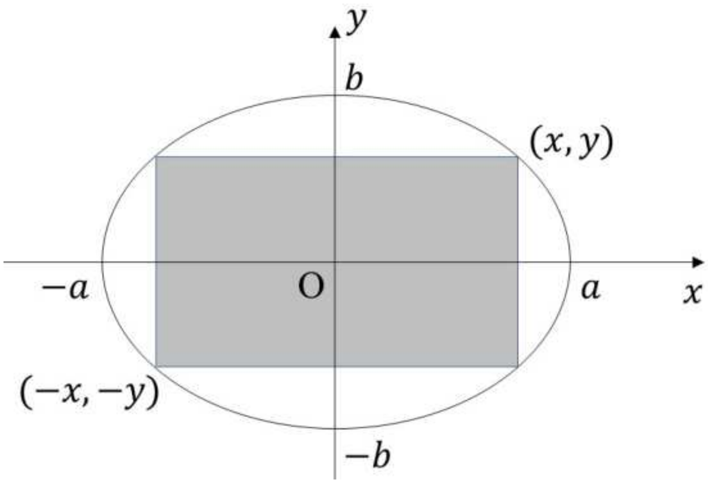

図 1

(3)　$I\equiv\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}dx$ とするとき，$I^2=\dfrac{\pi}{a}$ であることを示せ．ただし，a は正の定数とする．

(4)　ある部品を使い始めてから故障するまでの時間 t が指数分布 $p(t)=\lambda\exp(-\lambda t)$ に従うとする．ただし，$\lambda>0$, $t\geq 0$ とする．

(i)　部品を使い始めてから時刻 T までに故障が起こらない確率を求めよ．

(ii)　部品を使い始めてから時刻 T まで故障が起こらなかったとの条件の下で，その後，時刻 $T+\Delta T$ までの間に故障が起こる確率を求めよ．

(iii)　部品を使い始めてから故障するまでの平均時間を求めよ．