

令和 6 年度
(2 0 2 4 年度)

東北大学大学院理学研究科
博士課程前期 2 年の課程
地球物理学専攻一般選抜入学試験

筆記試験問題

数物系科目 : [1] – [7]

(表紙も含めて 1 2 枚)

令和 5 年 8 月 2 4 日

数 物 系 科 目

1. 数物系科目の問題は〔1〕から〔7〕まで7問ある．そのうち4問を選んで解答すること．
2. 答案は，問題ごとに別々の解答用紙に記入し，各解答用紙の上端に，問題番号（1カ所）と受験番号（1カ所）を記入すること．
3. 答案が白紙の場合でも，必ず解答用紙に問題番号と受験番号を記入して提出すること．
4. 答案には，計算の過程などの解答に至る根拠を記すこと．問題文に特に指示がある場合には，それに従うこと．解答用紙の裏面にも答案を記入してよい．
5. 問題紙，解答用紙，草案用紙は持ち帰らないこと．

[1] 質量 M の太陽からの万有引力を受けて、質量 m の惑星が時刻 t において太陽から距離 $r(t)$ の位置を運行している場合を考える。ここで M は m に比べて十分大きく、太陽は不動とする。また、惑星には太陽からの万有引力以外の力は働かず、太陽と惑星は質点で表せるとする。万有引力定数は G とする。惑星の軌道面内で、太陽を原点とするデカルト座標系 (x, y) と平面極座標系 (r, φ) をとると、両者には、①式の関係がある。

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \quad \text{①}$$

次の問いに答えよ。ただし、時間の一階微分と二階微分は、それぞれ「 $\dot{}$ 」と「 $\ddot{}$ 」を用いて示す（例えば dx/dt は $\dot{x}$ 、 d^2x/dt^2 は $\ddot{x}$ と書く）。

(1) この惑星に関する x 方向と y 方向の運動方程式を、それぞれ表せ。

(2) この惑星に関する r 方向と φ 方向の運動方程式は、平面極座標系で

$$r \text{ 方向: } m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = -\frac{GmM}{r^2}$$

$$\varphi \text{ 方向: } m(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) = 0$$

となることを示せ。

(3) 問 (2) の運動方程式から $r^2\dot{\varphi}$ が時刻によらず一定となることを示し、その物理的意味を 50 ～100 字程度で説明せよ。

(4) r が時刻によらず $r = a$ で一定の場合、この惑星の公転周期 T と a の関係を求めよ。

(5) r が時間とともに変化する場合、この惑星の軌道は

$$r = \frac{1}{A \cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{GM}{h^2}}$$

で表されることを示せ。ここで $h = r^2\dot{\varphi}$ で、 A と φ_0 は定数である。

[2] 分子数 N で単一相のギブスの自由エネルギー G は、 $G \equiv U - ST + PV = \mu N$ と表される。ここで、 U , S , T , P , V および μ は、それぞれ、内部エネルギー、エントロピー、絶対温度、圧力、体積および化学ポテンシャルである。以下の問いに答えよ。必要な変数を定義して利用してよい。

- (1) $\left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_P$ および $\left(\frac{\partial \mu}{\partial P}\right)_T$ を求めよ。
- (2) 2つの異なる相が平衡にある条件を述べよ。表面張力の効果は無視してよい。
- (3) 液相と気相を平衡に保ちながら温度を変化させるとき、以下の関係が成り立つことを示せ。ここで、 L は 1 mol あたりの潜熱、 v_1 および v_2 はそれぞれ液相および気相の 1 mol あたりの体積である。

$$\frac{dP}{dT} = \frac{L}{T(v_2 - v_1)}$$

- (4) 1 mol あたりの気体定数を R , 絶対温度 T_0 での飽和蒸気圧を P_0 とし、任意の絶対温度 T に対する飽和蒸気圧 P を求めよ。ここでは L を近似的に定数とみなし、 v_2 は v_1 より十分大きく、かつ気相は理想気体とみなせるものとする。
- (5) 問(4)の関係は「水」と「水蒸気」が共存する場合の飽和水蒸気圧の温度への依存性を表すが、「水」と「氷」が共存する場合の融解圧は温度への依存性が大きく異なる。どのように異なるか、その理由を含めて述べよ。

〔 3 〕 図 1 のように，無限に広い 2 枚の平行平板に挟まれた密度が一様な非圧縮粘性流体の流れを考える．平板に直交する向きに z 軸，紙面奥向きに y 軸をとる．下の板 ($z = 0$) は静止していて，上の板 ($z = H$) は一定の速度 U で x 方向に動いている．流れは x 軸に沿うとして，速度の x 軸方向の成分 u は y 軸方向に変化しない．流体の粘性率を μ (一定)，密度を ρ とする．流れは定常で，圧力勾配は存在しないものとする．この流体の x 軸方向の運動を，以下に示すナビエ・ストークスの式に従って考えるとき，次の問いに答えよ．

x 軸方向のナビエ・ストークスの式

(u, v, w : x, y, z 軸方向の速度成分． p は圧力．外力を無視)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad ①$$

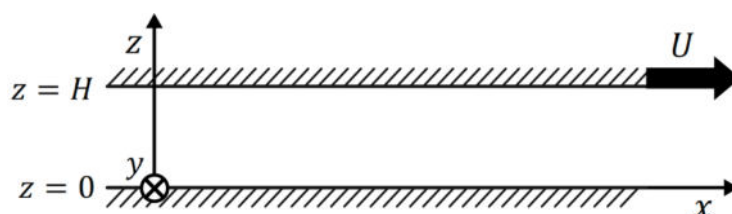


図1

- (1) 連続の式を用いて u は x に依存しないことを示せ．
- (2) 簡単化した①式が， $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ と表せることを示せ．
- (3) $z = 0$ および $z = H$ における u の境界条件を記せ．
- (4) u を z の関数として求め，図示せよ．
- (5) せん断応力 τ を z の関数として求め，図示せよ．
- (6) 流体として 20°C の空気と水を考える (表 1)．上の板を速度 U で動かし続けるのに必要な単位時間・単位面積あたりの仕事は，空気に比べて水は何倍になるか．導出過程を示して有効数字 2 桁で答えよ．

表 1. 20°C の空気と水の物性

	空気	水
密度 (kg m^{-3})	1.2	1.0×10^3
粘性率 ($\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$)	1.8×10^{-5}	1.0×10^{-3}

[4] 次の問いに答えよ. 真空の誘電率を ϵ_0 とする.

- (1) ガウスの法則を用いて, 電磁波の磁束密度 $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$ が波数 $\mathbf{k}$ と直交することを示せ. ここで $\mathbf{r}$ は位置, t は時刻, ω は角周波数, $\mathbf{B}_0$ は定数ベクトルである.
- (2) 無限に長く, 内部に円柱状の空洞を含む円柱状の導体がある. 図 1 の断面図で示すように, 導体外周の半径は a で, 空洞の半径は $a/2$ である. 導体の中心軸に沿って z 軸, 空洞の中心軸が xz 面に含まれるように x 軸をとる. この導体に一定の電流密度で $+z$ 方向に定常電流 I_0 ($I_0 > 0$) を流した. 次の問いに答えよ.
- (i) 導体を流れる電流 I_0 は, 半径 a の円柱領域全体を流れる電流 I_A と, 半径 $a/2$ の空洞と同じ領域を流れる電流 I_B の重ね合わせであらわすことができる. I_A, I_B をそれぞれ I_0 を用いてあらわせ. 電流は $+z$ 方向を正とする.
- (ii) アンペールの法則を用いて, 半径 a の円柱領域全体を流れる電流 I_A が (x, y, z) の位置につくる磁場 $\mathbf{H}_A$ を求めよ. 解答では I_A を用いること. またアンペールの法則を適用した閉曲線を明示すること.
- (iii) 導体を流れる電流 I_0 が空洞内の (x, y, z) の位置につくる磁場 $\mathbf{H}$ を求めよ. 解答では I_A, I_B ではなく I_0 を用いること.

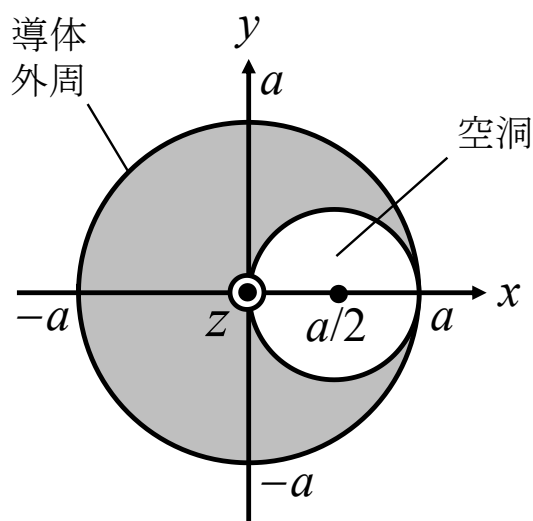


図 1

[4] は次ページに続く

- (3) 図2に示すように、中心を共有する導体球A（半径 a , $a > 0$ ）と導体球殻B（半径 b , $b > a$ ）がある。Bの厚さは無視できるほど薄い。A, Bは導線、抵抗、スイッチで接続されている。導線、抵抗、スイッチの帯電は十分小さく無視できる。A, Bの中心を原点として極座標系 (r, θ, ϕ) をとる。電位は無限遠を 0 V とする。最初にスイッチをOFFにして、A, Bにそれぞれ電荷 Q_A, Q_B ($Q_A > 0, Q_B > 0$) を与えた。次の問いに答えよ。
- (i) ガウスの法則を用いて電場の r 成分 $E_r(r)$ を求めよ。解答では、ガウスの法則を適用した閉曲面を明示すること。
 - (ii) 電位 $V(r)$ を求めよ。
 - (iii) A, Bに蓄えられる静電エネルギーの総和 W を求めよ。
 - (iv) スwitchをONにしたところ抵抗に電流が流れた。電流が流れなくなるまでに抵抗で消費されるエネルギー ΔW を求めよ。

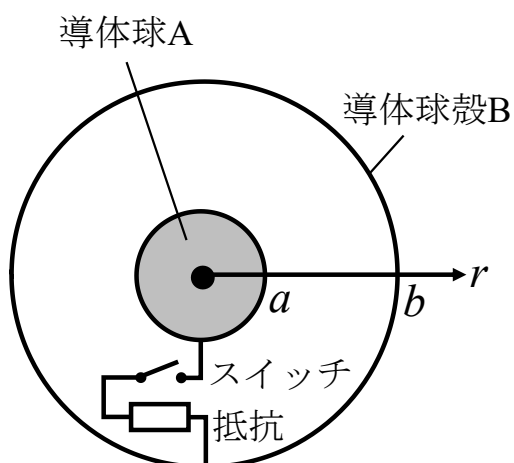


図2

[5] 質量 m の粒子の時間に依存しない一次元のシュレーディンガー方程式は、位置 x 、波動関数 $\psi(x)$ 、エネルギー E 、ポテンシャル $V(x)$ 、 $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ (h はプランク定数) を用いて次の式で表すことができる。

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right) \psi(x) = E\psi(x) \quad \textcircled{1}$$

この粒子が、幅 a ($a > 0$) の無限に深い一次元井戸型ポテンシャル

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq a) \\ \infty & (x < 0, x > a) \end{cases} \quad \textcircled{2}$$

に存在する状態を考える。この場合、 $\psi(x)$ は井戸の外では 0 になる。任意の自然数を n として、次の問いに答えよ。計算の過程も示すこと。

- (1) $0 \leq x \leq a$ の範囲で $\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$ (A, B は 0 以外の定数) の形が①式の解となるとき、 k を $E, m, \hbar$ のうち必要なものを用いて書き表せ。
- (2) この粒子のエネルギー固有値 E_n が $\frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} n^2$ であることを導出せよ。
- (3) 規格化された固有関数 $\psi_n(x)$ を求めよ。
- (4) $n = 1, 2, 3$ の場合の $\psi_n(x)$ をグラフで表せ。ただし、グラフの横軸の範囲は $0 \leq x \leq a$ とせよ。
- (5) 位置 x の期待値と標準偏差を導け。
- (6) 運動量 p の期待値と標準偏差を導け。
- (7) x および p の不確定性は、それぞれの標準偏差程度であると考えられる。 x と p に不確定性関係が成り立つことを示せ。

[6] 次の文章を読んで、以下の(1)から(4)の問いに答えよ。

直交直線座標系 $O\text{-}xyz$ において、物体に外力が作用し、内力が生じている。この物体内の微小体積を ΔV とし、その表面に点 Q をとる。微小体積 ΔV の表面上にあり、点 Q を含む面積素片 ΔS (外向き法線ベクトルは $\boldsymbol{n}$) に対して、 ΔV の外側から作用する力のベクトルを $\Delta \boldsymbol{P}$ とする。このとき、①式によって定義される $\boldsymbol{\sigma}^n$ を (ア) という。

$$\boldsymbol{\sigma}^n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \boldsymbol{P}}{\Delta S} \quad \text{①}$$

物体内の応力をあらわす応力テンソルは、 x 軸、 y 軸、 z 軸のそれぞれを法線とする面における、3つの (ア) の成分からなる②対称テンソルである。応力テンソルの成分は、採用する座標系に依存する。応力テンソルの非対角成分がゼロになるようにとった座標系の座標軸の方向を (イ) といい、この応力テンソルの対角成分を (ウ) という。

物体の変形は、3つの座標軸のそれぞれに平行にとった3本の線素の長さの変化と (エ) から定義されるひずみテンソルによって表現することができる。応力テンソルと同様に、ひずみテンソルの成分も、採用する座標系に依存する。

線形弾性体においては、応力とひずみの間に、フックの法則と呼ばれる構成方程式が成り立つ。一般的には、フックの法則は (オ) 個の独立な弾性定数を含む。物体を構成する物質の③弾性的性質に対称性 (面对称性や軸対称性など) がある場合には、独立な弾性定数の数は減り、等方弾性体では2つの定数 (ラメの定数) で表すことができる。

- (1) 問題文の (ア) から (オ) にあてはまる語句または数を記せ。
- (2) 波線②に関し、応力テンソルが対称であることの物理的意味を 50 字程度で述べよ。
- (3) 波線③に関し、弾性的性質に対称性があるとはどういうことか、フックの法則の観点から 50 字程度で説明せよ。

[6] は次ページに続く

- (4) 弾性的性質が、 z 軸に関して軸対称な弾性体のフックの法則は②式のように書ける。

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{11} - C_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix} \quad \textcircled{2}$$

ここで、 σ_{ij} と ε_{ij} ($i, j = x, y, z$) は、それぞれ、応力とひずみの成分である。

また、 C_{11} , C_{12} , C_{13} , C_{33} , C_{44} は弾性定数で、いずれも正である。

この弾性体に、 $\sigma_{yy} = \sigma$ (σ は正の定数) で、他の成分はゼロである応力を加える。

- (i) この弾性体内に生じるひずみを求めよ。
- (ii) ε_{yy} は正、 ε_{xx} と ε_{zz} は負となるために、 C_{11} , C_{12} , C_{13} , C_{33} が満たすべき条件を示せ。

[7] 次の問いに答えよ.

(1) エルミート行列 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix}$ について, 以下の問いに答えよ. i は虚数単位 ($i = \sqrt{-1}$) である.

(i) 固有値 λ_k ($k = 1, \dots, n$; n は固有値の個数) を求めよ.

(ii) 問(i)で求めた λ_k に対応する固有ベクトル $\mathbf{u}_k = \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}$ を求めよ. $\mathbf{u}_k$ は規格化し, また, b_k は正の実数とせよ.

(iii) 問(ii)の結果を用いて, $\mathbf{A}$ を対角化できるユニタリ行列 $\mathbf{U}$ を求めよ.

(2) 線積分 $I = \int_C \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$ を計算せよ. 経路 C は, xy 平面上の点 $P(1,1)$ から, 点 $Q(-1,1)$ を通り, 点 $R(-1,-1)$ に至る線分からなる折れ線とする.

(3) 閉曲面 S で囲まれた領域を V とする. 以下の問いに答えよ. 閉曲面 S の法線ベクトルを $\mathbf{n}$ とし, $\mathbf{n} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial n}$ と書く. ϕ, ψ は連続で無限回微分可能なスカラー関数とする.

(i) 発散定理から出発して, ①式の関係が成り立つことを示せ.

$$\iiint_V [\phi \nabla^2 \psi + (\nabla \phi) \cdot (\nabla \psi)] dV = \iint_S \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS \quad \text{①}$$

(ii) ϕ が, V 内で $\nabla^2 \phi = 0$ であり, また, S 上で $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$ であるとき, ϕ は V 内で定数となることを示せ.

[7] は次ページに続く

- (4) xy 平面上を移動する点 P の軌跡を考える．点 P の位置の時間変化については②式の関係がある．

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = x + y - x(x^2 + y^2) \\ \frac{dy}{dt} = -x + y - y(x^2 + y^2) \end{array} \right. \quad \text{②}$$

時刻 $t = 0$ のときの点 P の位置を (x_0, y_0) とする． $x_0^2 + y_0^2 > 1$ であるとき，点 P は $t \rightarrow \infty$ でどのような振る舞いをするか答えよ．

必要であれば，ある数 a について成り立つ次の関係を用いよ．

$$\frac{1}{a(1-a)(1+a)} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{a-1} - \frac{2}{a} \right)$$