

令和 7 年度
(2 0 2 5 年度)

東北大学大学院理学研究科
博士課程前期 2 年の課程
地球物理学専攻一般選抜入学試験

筆記試験問題

数物系科目：[1] – [7]

(表紙も含めて 1 1 枚)

令和 6 年 8 月 2 2 日

数 物 系 科 目

1. 数物系科目の問題は〔1〕から〔7〕まで7問ある．そのうち4問を選んで解答すること．
2. 答案は，問題ごとに別々の解答用紙に記入し，各解答用紙の上端に，問題番号（1カ所）と受験番号（1カ所）を記入すること．
3. 答案が白紙の場合でも，必ず解答用紙に問題番号と受験番号を記入して提出すること．
4. 答案には，計算の過程などの解答に至る根拠を記すこと．問題文に特に指示がある場合には，それに従うこと．解答用紙の裏面にも答案を記入してよい．
5. 問題紙，解答用紙，草案用紙は持ち帰らないこと．

〔 1 〕 図1のように、長さ l 、質量 M の一様でまっすぐな棒が、上端から距離 s ($0 \leq s < \frac{l}{2}$)

の位置にある点 O を通り紙面に垂直な軸 (y 軸) のまわりを、滑らかに回転できるようになっている。鉛直下向き (z 軸の正の向き) の重力加速度を g とし、 z 軸と棒のなす角を θ とする。回転軸が棒に及ぼす抗力の x 成分、 z 成分をそれぞれ N_x 、 N_z とする。また、棒の幅は無視できるほど小さく、空気抵抗も無視できるものとする。次の問いに答えよ。最終的な解答は、 M 、 l 、 s 、 θ 、 g 、 N_x 、 N_z および θ の時間に関する一階微分 $\dot{\theta}$ 、二階微分 $\ddot{\theta}$ のうち必要なものを用いて示すこと。

- (1) 棒の y 軸まわりの慣性モーメント I を求めよ。また、 $s = 0$ のとき $I = \frac{1}{3} M l^2$ であることを示せ。
- (2) 棒の回転運動に関する方程式を示せ。
- (3) 棒の重心運動に関する方程式の x 成分、 z 成分をそれぞれ示せ。
- (4) 棒が $\theta = 0$ の位置で静止しているとき、棒の下端に水平方向に初速 v_0 を与えると、棒はちょうど水平の位置 ($\theta = \frac{\pi}{2}$) まで上がった。 v_0 を求めよ。
- (5) 棒を水平の位置 ($\theta = \frac{\pi}{2}$) から静かに放した後、角度 θ ($0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$) の位置にあるときの N_x 、 N_z を求めよ。また、このときの棒の角速度の大きさを求めよ。
- (6) 問 (5) の角度 θ の位置における棒の角速度の大きさを最大にする s を求めよ。また、このときの棒の角速度の大きさを求めよ。

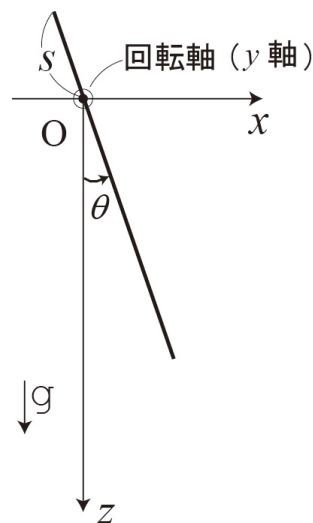


図 1

[2] 次の問いに答えよ.

- (1) 断熱容器の内部をよく熱を通す壁で 2 つの領域に分け, それぞれの領域に熱容量 C_1 , 温度 T_1 の物質 1 と, 熱容量 C_2 , 温度 T_2 の物質 2 を満たした. この初期状態を状態 X とする. やがて壁を通して熱が移動し, 物質 1 と物質 2 の温度がともに T_b の熱平衡状態に達した. この熱平衡状態を状態 Y とする. ここで $T_1 > T_2$ とする. 次の問いに答えよ.

- (i) 物質 1 について, 状態 X から状態 Y に変化したときのエントロピーの変化 ΔS_1 を求めよ.
- (ii) 物質 1 と物質 2 の熱容量がともに C である場合について, 状態 X から状態 Y への変化が不可逆過程であることを示せ.

- (2) 1 モルの単原子理想気体に, 図 1 に示す循環過程を行わせた. すなわち状態 1 (温度 T_1 , 圧力 P_1 , 体積 V_1) から真空中への断熱自由膨張によって状態 2 (温度 T_2 , 圧力 P_2 , 体積 V_2) に変化させ, さらに準静的な定圧圧縮によって状態 3 (温度 T_3 , 圧力 P_2 , 体積 V_1) に変化させた後に, 準静的な定積変化によって状態 1 に戻した. ここで, 気体定数を R , 定積モル比熱を C_v , 定圧モル比熱を C_p , アボガドロ数を N_A とし, $V_1 < V_2$ とする. 次の問いに答えよ.

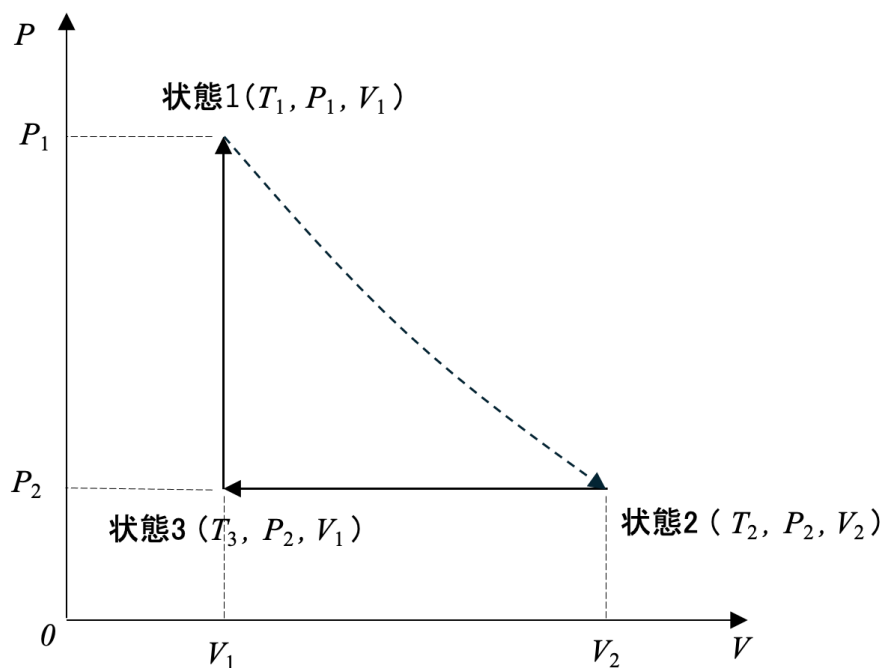


図 1

[2] は次ページに続く

- (i) 温度 T_1 と温度 T_2 の関係はどのようなになるか説明せよ.
- (ii) この循環過程について, 系の内部エネルギーの変化を考えることによって, マイヤーの法則 ($C_p - C_v = R$) を導け.
- (iii) 体積 V , 温度 T の単原子理想気体分子 1 個の分配関数 Z は①式で与えられる.

$$Z = V \left(\frac{2\pi m k T}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \quad \text{①}$$

ここで, m , k , h はそれぞれ, 単原子理想気体分子の質量, ボルツマン定数, プランク定数を示す. 単原子理想気体分子 1 モルについての分配関数を用いて, 状態 1 から状態 2 への変化が不可逆過程であることを示せ.

- (iv) ①式を用いて, 状態 2 での単原子理想気体の内部エネルギー U_2 が,

$$U_2 = \frac{3}{2} R T_2$$

であることを示せ.

[3] 2次元非圧縮完全流体の渦なし流れを考える. 2次元直交直線座標を (x, y) , 速度の x, y 成分を (u, v) として, 次の問いに答えよ.

- (1) 流れは渦なしのため, 速度ポテンシャル Φ が存在する. 速度成分 (u, v) を Φ を用いて表せ.
- (2) 流線関数 (流れの関数) を Ψ とする. 速度成分 (u, v) を Ψ を用いて表せ.
- (3) 複素平面を考え, 複素平面上の点を $z = x + iy$ で表示する. i は虚数単位である. 複素平面上の原点からの距離を r , x 軸と動径のなす角を θ とすると, z は極座標表示で $z = re^{i\theta}$ と書ける. 以下, 複素速度ポテンシャルが

$$f(z) = Az^n \quad \text{①}$$

と表される流れを考える. A, n は正実数の定数である. ①式で表される流れの Φ と Ψ をそれぞれ r, θ, A, n で表せ.

- (4) ①式で表される流れで, $n = 2$ の場合を考える. $x = 0$ と $y = 0$ に壁面がある xy 平面の $x > 0$ かつ $y > 0$ である領域内の流線関数と等ポテンシャル線を A, x, y で表し, 図示せよ.
- (5) ①式で表される流れの速度ベクトルの大きさを q とする. 次の問いに答えよ.
 - (i) q を r の関数として求めよ.
 - (ii) $n \geq 1$ のとき, $r = 0$ における q を求めよ. 必要に応じて n の値により分類せよ.
 - (iii) $\frac{1}{2} \leq n < 1$ のとき, $r \rightarrow 0$ における q を求めよ. また, 圧力はどのようなになるか, 20字程度で述べよ.
 - (iv) 問(iii)の状況と, 現実の流体での状況との相違を 30字程度で説明せよ.

[4] 次の問いに答えよ．真空中の誘電率を ϵ_0 ，透磁率を μ_0 とする．

- (1) 一様な電場，磁場中での荷電粒子の運動について考える．直交直線座標系 (x, y, z) において電場を $\mathbf{E} = (E, 0, 0)$ ，磁束密度を $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ とおく．荷電粒子の質量を m ，電荷を q ，速度を $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ とする．荷電粒子の xy 面内の運動について，次の問いに答えよ．

- (i) 荷電粒子の x および y 方向の運動方程式を示せ．
- (ii) 電場と磁束密度が時間変化しない場合について， v_x と v_y の一般解を求めよ．
- (iii) 電場の x 成分が $E = E_0 + E_1 t$ (E_0, E_1 は定数， t は時間) でゆっくりと変化する時，時間 $T = 2\pi m/(qB)$ で平均した荷電粒子の速度の x 成分を求めよ．

- (2) 抵抗を持つ円柱状の長い導線の両端に電圧 V をかけたところ，導線に一様な電流 I が流れた．導線の半径を a ，長さを l とする．導線の中心軸を z 軸とする円筒座標系 (R, ϕ, z) を用いて，次の問いに答えよ．

- (i) 導線内の電場 $\mathbf{E}$ と磁場 $\mathbf{H}$ を求めよ．磁場は導線が無限長の場合と同じとみなしてよい．
- (ii) 導線表面でのポインティングベクトルを求めよ．また，これを用いて導線表面を出入りする電磁エネルギーの総和を求め，導線で消費されるジュール熱との関係について 50 字程度で簡潔に述べよ．

- (3) 図 1 のように電荷 q を与えた球（半径 a ）が z 軸に沿って光速より十分に遅い一定の速さ v で運動している．次の問いに答えよ．

- (i) 球の中心を原点とする極座標系で (r, θ, ϕ) の位置にある点 $P(r > a)$ での電場 $\mathbf{E}$ を求めよ．
- (ii) 球の運動によって，点 P に磁場

$$\mathbf{H} = \frac{qv}{4\pi r^2} \sin \theta \mathbf{e}_\phi$$

が生じることを導け．ここで， $\mathbf{e}_\phi$ は ϕ 方向の単位ベクトルである．

- (iii) 球外の磁場の全エネルギーが

$$U = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q^2}{3a} v^2$$

となることを導け．

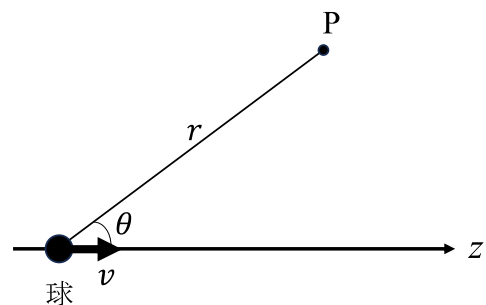


図 1

[5] 原子・分子のエネルギー準位を概算する．次の問いに答えよ． h はプランク定数 ($6.6 \times 10^{-34} \text{ m}^2 \text{ kg s}^{-1}$, $\hbar = h/2\pi$), ϵ_0 は真空の誘電率 ($8.9 \times 10^{-12} \text{ F/m}$), e は素電荷 ($1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$), M は陽子質量 ($1.7 \times 10^{-27} \text{ kg}$), m は電子質量 ($9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$) である．解答は有効数字 1 桁．また $m/M \sim 1/1600$, 光速 $3 \times 10^8 \text{ m/s}$ を用いてよい．

(1) 水素原子の基底状態は，電子が半径 r_0 の球対称域に閉じ込められているとみなせる．

- (i) 古典的に電子が軌道半径 r_0 の円軌道で陽子(静止状態)を周回するとみなす．電子の運動量 p_0 と r_0 の関係を示せ．
- (ii) 不確定性関係 $r_0 \cdot p_0 \approx \hbar$ から， r_0 がボーア半径 $\sim 0.05 \text{ nm}$ となることを示せ．
- (iii) $r_0 \cdot p_0 \approx \hbar$ から電子の運動エネルギー $E_0 = p_0^2/2m$ は r_0 に対して①式の関係をとる． E_0 に相当する光子の波長を求めよ．

$$E_0 \approx \hbar^2/2mr_0^2 \quad \text{①}$$

(2) 水素分子は電子の共有で結合し，原子間距離 r_0 程度の調和振動子とみなせる．

- (i) 基底状態近傍で， r_0 程度の変位に対し振動エネルギーは①式の E_0 程度変化するとみなせる．ここから得られるバネ定数 K ，および E_0 , r_0 , M を用いて，角振動数 $\omega_1 = (K/M)^{1/2}$ を示せ．
- (ii) 基底状態近傍で，振動準位の間隔 E_1 は $\hbar\omega_1$ で量子化される．①式の関係を用いて， $E_1 \approx (m/M)^{1/2}E_0$ となることを示せ．
- (iii) E_1 に相当する光子の波長を求めよ．

(3) 水素分子は，原子間距離 r_0 程度の回転子ともみなせる．

- (i) $\hbar$ は角運動量と同じ次元を持つことを示せ．
- (ii) 基底状態近傍で，角運動量 L は間隔 $\hbar$ で量子化される．①式の関係を用いて，回転準位の間隔 E_2 は $E_2 \approx (m/M)E_0$ となることを示せ．
- (iii) E_2 に相当する光子の波長を求めよ．

(4) 地球・惑星大気を構成する多原子分子は，一般に振動準位の遷移に回転準位の遷移が伴い，電磁波との相互作用で「振動回転スペクトル」を示す．これが地球・惑星の熱収支にもたらす影響とその仕組みについて，40 文字程度で述べよ．

[6] 3次元直交直線座標系 (x_1, x_2, x_3) における弾性体の微小変形を考える．次の問いに答えよ．

- (1) 均質等方弾性体において，応力テンソル σ_{ij} と歪テンソル e_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) の関係は，ラメの定数 λ, μ ，クロネッカーのデルタ δ_{ij} および総和規約を用いて，①式のように書ける．また，この弾性体が平衡状態にあるときの σ_{ij} と体積力 F_i の関係（平衡方程式）は総和規約を用いて，②式のように書ける．

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} e_{kk} + 2\mu e_{ij} \quad (k = 1, 2, 3) \quad \text{①}$$

$$\sigma_{ji,j} + F_i = 0 \quad \text{②}$$

以下， x_3 軸方向を含む応力成分がすべて 0 ($\sigma_{33} = \sigma_{32} = \sigma_{31} = 0$) の平面応力状態にある場合を考える．次の問いに答えよ．

- (i) 一般に平面応力状態はどのような問題を扱うのに適しているか，25 字程度で述べよ．
- (ii) e_{33} を， $\lambda, \mu, e_{11}, e_{22}$ を用いて表せ．
- (iii) 応力と歪の関係式を， e_{33}, e_{32}, e_{31} を用いずに，総和規約に従って示せ．
- (iv) 平衡方程式を λ, μ, F_i および変位成分 u_i, u_j を用い，総和規約に従って示せ．
- (2) 以下では圧縮応力を正とする．単位長さの法線ベクトルが $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ である面 P に作用する応力ベクトル $\mathbf{T}^n$ の x_i 軸方向の成分 T_i^n は，総和規約を用いて③式の通り書ける．ここで σ_{ij} は応力テンソルである．③式は，ある点における σ_{ij} が分かれば，法線ベクトルが $\mathbf{n}$ である面に作用する T_i^n が得られることを示す．ここで，主応力を σ_i (ただし， $i = 1, 2, 3$) とし， $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 > 0$ とする．また，面 P に作用する応力ベクトル $\mathbf{T}^n$ の法線応力成分を N ，せん断応力成分を S とする．次の問いに答えよ．

$$T_i^n = \sigma_{ji} n_j \quad \text{③}$$

- (i) $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ に対応する主軸が， x_1 軸， x_2 軸， x_3 軸とそれぞれ平行である時，③式がどのように表せるか示せ．
- (ii) 問 (i) の時の N および S^2 を，法線ベクトル $\mathbf{n}$ および応力テンソルのそれぞれの成分を用いて示せ．

[6] は次ページに続く

- (iii) 主応力軸方向と同一の法線を持つ面における S の大きさを求めよ.
- (iv) S の最大値を, $n_i n_i = 1$ (ただし, $i = 1, 2, 3$) の条件を使い, σ_i を用いて示せ.
- (v) モールの応力円の式を N , S および σ_i を用いて導け.
- (vi) 問 (v) で導いた式に基づいて, モールの応力円を図示せよ. また, N および S の組み合わせが存在しうる範囲を図中に示せ.

[7] 次の問いに答えよ.

- (1) 次の微分方程式の一般解を求めよ. ただし, $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ とする.

$$y'' + 3y' + 2y = e^x$$

- (2) 2 次の正方行列 $\mathbf{A}$ が $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}$ かつ $\mathbf{A} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ を満たすとき, 以下の問いに答えよ.

(i) $\mathbf{A}$ を求めよ.

(ii) $\mathbf{A}$ を対角化せよ.

- (3) 平面極座標 (r, θ) で表される曲線 $r = 1 + \cos \theta$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) について, 以下の問いに答えよ.

(i) 曲線が囲む面積を求めよ.

(ii) 曲線の全長を求めよ.

- (4) 複素関数 $f(z) = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{1-2z}$ について, 以下の問いに答えよ.

(i) $f(z)$ の原点を中心としたテイラー展開を求めよ. ただし, $|z| < \frac{1}{2}$ とする.

(ii) $f(z)$ のすべての留数を求めよ.

(iii) $I = \oint_C f(z) dz$ を求めよ. ただし, C は $|z| > 2$ の円を表すとする.